Exercices sur les tirages de cartes

Exercice 2D.1

1. Combien y a-t-il de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes ?
2. Combien y a-t-il de mains de 5 cartes comportant exactement 2 Trèfles dans un jeu de 32 cartes ?
3. Combien y a-t-il de mains de 5 cartes comportant le valet de Pique et au moins 2 Coeurs dans un jeu de 32 cartes ?

Exercice 2D.2 : On choisit 5 cartes dans un jeu de 32. Combien y a-t-il de résultats comprenant :

1) exactement 2 valets ;
2) aucun as ;
3) au moins 3 dames ;
4) 2 trèfles et 3 carreaux ;
5) 2 cartes d'une couleur et trois de l'autre ;
6) au moins un roi ;
7) 3 piques et 2 roi ?

Exercice 2D.3 : Dans cet exercice, on attend des réponses qui ne sont pas des valeurs numériques, mais des expressions en termes de factorielles, sous la forme la plus simple possible.

1. Combien y-a-t-il de façons de répartir les 52 cartes d'un jeu entre 4 joueurs N, S, E, O, chacun possédant 13 cartes.
2. Parmi ces façons, combien y-en-a-t-il qui sont telles que chaque joueur n'a qu'une seule couleur (par exemple, N a les 13 piques, S a les 13 coeurs, ...) ?
3. Combien y-a-t-il de façons que deux joueurs quelconques aient chacun une seule couleur?
4. Combien y-a-t-il de façons que deux partenaires, c'est-à-dire (N,S) ou (E,O), aient chacun une seule couleur, les deux autres partenaires ayant des cartes quelconques.

Exercice 2D.4 :

Une main au poker est formée de 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes. Traditionnellement, trèfle, carreau, coeur, pique sont appelées couleurs et les valeurs des cartes sont rangées dans l'ordre : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, de la plus forte à la plus faible. Dénombrer les mains suivantes :

1. quinte flush : main formée de 5 cartes consécutives de la même couleur (la suite as, 2, 3, 4 et 5 est une quinte flush).
2. carré : main contenant 4 cartes de la même valeur (4 as par exemple).
3. full : main formée de 3 cartes de la même valeur et de deux autres cartes de même valeur (par exemple, 3 as et 2 rois).
4. quinte : main formée de 5 cartes consécutives et qui ne sont pas toutes de la même couleur.
5. brelan : main comprenant 3 cartes de même valeur et qui n'est ni un carré, ni un full (par exemple, 3 as, 1 valet, 1 dix).

Exercice 2D.5 :

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. sans imposer de contraintes sur les cartes.
2. contenant 5 carreaux ou 5 piques.
3. 2 carreaux et 3 piques.
4. au moins un roi.
5. au plus un roi.
6. 2 rois et 3 piques (exactement).

Exercice 2D.6 : Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément une « main » de 5 cartes.

1) Combien y a-t-il de « mains » possibles ?
2) Combien y a-t-il de « mains » contenant :
   a) exactement 2 piques
   b) 2 trèfles et 3 carreaux
   c) les 4 rois
   d) au moins 1 dame
   e) 1 roi et 2 trèfles

Exercice 2D.1

1. ***Combien y a-t-il de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes ?***

   Une main de 5 cartes correspond à une combinaison de 5 éléments parmi 32 (l'ordre n'ayant pas d'importance).

   On calcule donc : $\binom{32}{5}=\frac{32!}{5!\times 27!}=\frac{32\times31\times30\times29\times28}{120}=201376$

   Il y a 201 376 mains de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

2. ***Combien y a-t-il de mains de 5 cartes comportant exactement 2 Trèfles dans un jeu de 32 cartes ?***

   Les 2 Trèfles (choisis parmi les 8) correspondent à une combinaison de 2 éléments parmi 8. Les 3 autres cartes (choisis parmi les 24) correspondent à une combinaison de 3 éléments parmi 24. On utilise alors le principe multiplicatif. On calcule :

   $$\binom{8}{2}\times\binom{24}{3}=\frac{8!}{2!\times 6!}\times\frac{24!}{3!\times 21!}=\frac{8\times7}{2}\times\frac{24\times23\times22}{6}=56672$$

   Il y a 56 672 mains de 5 cartes comportant exactement 2 Trèfles dans un jeu de 32 cartes.

3. ***Combien y a-t-il de mains de 5 cartes comportant le valet de Pique et au moins 2 Coeurs dans un jeu de 32 cartes ?***

   On choisit déjà le valet de Pique.

   Puis on choisit au moins 2 Coeurs, c'est à dire soit 2, soit 3, soit 4 Coeurs parmi les 8 Coeurs. Et on complète avec des cartes qui ne sont ni des Coeurs, ni le valet de Pique choisies parmi les 23 cartes possibles.

   On calcule donc :

   $$\binom{1}{1}\times\binom{8}{2}\times\binom{23}{2}+\binom{1}{1}\times\binom{8}{3}\times\binom{23}{1}+\binom{1}{1}\times\binom{8}{4}\times\binom{23}{0}=\frac{8!}{2!\times 6!}\times\frac{23!}{2!\times 21!}+\frac{8!}{3!\times 5!}\times\frac{23!}{1!\times 22!}+\frac{8!}{4!\times 4!}\times 1$$

   $$=28\times253+56\times23+\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=7084+1288+70=8442$$

   Il y a 8 442 mains de 5 cartes comportant le valet de Pique et au moins 2 Coeurs dans un jeu de 32 cartes.

Exercice 2D.2 :

On choisit 5 cartes dans un jeu de 32. Combien y a-t-il de résultats comprenant :

1) *exactement 2 valets*

   On choisit 2 valets parmi quatre sans ordre : $\binom{4}{2}$ choix, puis 3 cartes parmi les 28 non valets : $\binom{28}{3}$ choix. Principe multiplicatif : en tout : $\binom{4}{2}\times\binom{28}{3}=19656$ choix.

2) *aucun as*

   On choisit 5 cartes parmi les 28 autres cartes, donc $\binom{28}{5}=98280$ choix.

3) *au moins 3 dames*

   Attention à ne pas compter deux fois la même main (3 dames puis 2 parmi les 29 restantes est faux). Il faut étudier 2 cas :

   - 4 dames puis 1 parmi les 28 autres cartes,
   - 3 dames, puis 2 parmi les 28 autres cartes.

   En appliquant le principe additif, on obtient :

   $$\binom{4}{4}\times\binom{28}{1}+\binom{4}{3}\times\binom{28}{2}=1540 \text{ choix.}$$

4) *2 trèfles et 3 carreaux*

2 cartes parmi les 8 trèfles puis 3 cartes parmi les 8 carreaux donc : $\binom{8}{2}\times\binom{8}{3}\times\binom{16}{0}=\binom{8}{2}\times\binom{8}{3}$.

5) *2 cartes d'une couleur et trois de l'autre*

Attention, il faut bien lire la question, ici couleur désigne noir ou rouge et non pique, coeur, carreau, trèfle. On choisit la couleur des deux cartes donc 2 cas

- 2 cartes noires et 3 rouges : tirage sans ordre : $\binom{16}{2}\times\binom{16}{3}$
- 3 cartes noires et 2 rouges : tirage sans ordre : $\binom{16}{3}\times\binom{16}{2}$.

En appliquant le principe additif, on obtient : $\binom{16}{2}\times\binom{16}{3}+\binom{16}{3}\times\binom{16}{2}=134\,400$ possibilités.

6) *au moins un roi*

Evènement contraire, aucun roi : $\binom{4}{0}\times\binom{28}{5}$. Donc le nombre de résultats est :

$$\binom{32}{5}-\binom{28}{5}=103\,096 \text{ possibilités.}$$

7) *3 piques et 2 roi ?*

Deux cas à distinguer :

- avec le roi de pique, 1 roi parmi les trois autres, puis 2 piques parmi 7 autres piques, puis 1 carte dans les 21 restantes :
$$\binom{1}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{7}{2}\times\binom{21}{1}=\binom{3}{1}\times\binom{7}{2}\times\binom{21}{1}$$
- sans le roi de pique, 2 rois parmi les trois autres rois, puis 3 piques parmi 7 autres piques :
$$\binom{1}{0}\times\binom{3}{2}\times\binom{7}{3}\times\binom{21}{0}=\binom{3}{2}\times\binom{7}{3}.$$

En appliquant le principe additif, on obtient : $\binom{3}{1}\times\binom{7}{2}\times\binom{21}{1}+\binom{3}{2}\times\binom{7}{3}=1428$ possibilités.

Exercice 2D.3 :

Dans cet exercice, on attend des réponses qui ne sont pas des valeurs numériques, mais des expressions en termes de factorielles, sous la forme la plus simple possible.

1. *Combien y-a-t-il de façons de répartir les 52 cartes d'un jeu entre 4 joueurs N, S, E, O, chacun possédant 13 cartes.*

Il y a $\binom{52}{13}$ choix possibles pour le premier joueur, puis $\binom{52-13}{13}=\binom{39}{13}$ choix possibles pour le deuxième joueur, et encore $\binom{39-13}{13}=\binom{26}{13}$ pour le troisième. Le dernier joueur prend les 13 cartes restantes. Au total on trouve

$$\binom{52}{13}\times\binom{39}{13}\times\binom{26}{13}\times\binom{13}{13}=\frac{52!}{13!\times 39!}\times\frac{39!}{13!\times 26!}\times\frac{26!}{13!\times 13!}\times 1=\frac{52!}{(13!)^4}\simeq 2{,}08\times 10^{48}.$$

2. *Parmi ces façons, combien y-en-a-t-il qui sont telles que chaque joueur n'a qu'une seule couleur (par exemple, N a les 13 piques, S a les 13 cœurs, ...) ?*

On choisit une couleur parmi 4 pour le premier joueur, puis une couleur parmi 3 pour le deuxième et enfin une couleur parmi 2 pour le troisième. Cela fait $4!=24$ possibilités. On peut aussi argumenter à l'aide du nombre de permutations de 4 couleurs.

3. *Combien y-a-t-il de façons que deux joueurs quelconques aient chacun une seule couleur?*

On commence par choisir les deux joueurs qui ont la même couleur. Il y a $\binom{4}{2}=\frac{4\times 3}{2}=6$ tels choix.

On choisit ensuite une couleur parmi 4 pour le premier joueur, et une couleur parmi 3 pour le deuxième joueur. Il reste pour le 3ème joueur à choisir 13 cartes parmi les 26 restantes tandis que le quatrième prend le reste. On trouve donc :

$$\binom{4}{2}\times 4\times 3\times\binom{26}{13}=\frac{4\times 3}{2}\times 4\times 3\times\frac{26!}{13!\times 13!}=72\times\frac{26!}{(13!)^2}.$$ **!!!!!!!!!!!!!!**

Mais ce faisant, on a compté deux fois chaque cas où les 4 joueurs ont une seule couleur. Il faut donc retirer $4!$ précédemment calculé et le résultat final est :

$$\binom{4}{2}\times 4\times 3\times\binom{26}{13}-4!=72\times\frac{26!}{(13!)^2}-4!.$$

4. *Combien y-a-t-il de façons que deux partenaires, c'est-à-dire (N,S) ou (E,O), aient chacun une seule couleur, les deux autres partenaires ayant des cartes quelconques.*

Le dénombrement à réaliser est très similaire, mais il y a moins de choix pour choisir les deux joueurs qui ont la même couleur puisqu'on ne choisit plus deux joueurs quelconques, mais deux partenaires.

Il n'y a donc que 2 choix au lieu de $\binom{4}{2}$. Finalement, on trouve

$$2\times 4\times 3\times\binom{26}{13}-4!=24\times\frac{26!}{(13!)^2}-4!.$$

Exercice 2D.4 :

Une main au poker est formée de 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes. Traditionnellement, trèfle, carreau, coeur, pique sont appelées couleurs et les valeurs des cartes sont rangées dans l'ordre : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, de la plus forte à la plus faible. Dénombrer les mains suivantes :

1. *quinte flush : main formée de 5 cartes consécutives de la même couleur (la suite as, 2, 3, 4 et 5 est une quinte flush).*

Il y a 4 choix pour la couleur. La couleur choisie, il suffit de choisir la plus haute carte de la main : il s'agit de n'importe quelle carte entre le 5 et l'as. Il y a donc 10 choix possibles pour la hauteur de la plus haute carte, et donc $4\times 10=40$ mains conduisant à une quinte flush.

2. *carré : main contenant 4 cartes de la même valeur (4 as par exemple).*

Il y a 13 choix possibles pour la hauteur de la carte constituant le carré (carré d'as, carré de rois, ...). Cette hauteur fixée, il faut encore choisir une carte parmi les 48 autres pour compléter la main. Il y a donc $13\times 48=624$ mains contenant un carré.

Autre approche : tirage sans ordre sans remise : $13\times\binom{48}{1}=624$.

3. *full : main formée de 3 cartes de la même valeur et de deux autres cartes de même valeur (par exemple, 3 as et 2 rois).*

On choisit d'abord la hauteur des 3 cartes de même valeur. Il y a 13 choix. On choisit alors ces 3 cartes de même valeur. Il y a $\binom{4}{3}=4$ choix possibles. On choisit ensuite la hauteur des deux autres cartes. Il reste 12 choix. Puis on choisit ces 2 cartes de même valeur. Il y a $\binom{4}{2}=6$ choix. Finalement, le nombre de mains constituant un full est

$$13\times\binom{4}{3}\times12\times\binom{4}{2}=13\times4\times12\times6=3744.$$

4. *quinte : main formée de 5 cartes consécutives et qui ne sont pas toutes de la même couleur.*
On va dénombrer d'abord le nombre de mains constituées de 5 cartes consécutives, qu'elles soient ou non de la même couleur. On retirera ensuite le nombres de quintes flush pour obtenir le nombre de mains constituées de 5 cartes qui ne sont pas toutes de la même couleur.
Si on compte le nombre de mains constituées de 5 cartes consécutives, qu'elles soient ou non de la même couleur, alors on doit choisir la hauteur de la carte la plus haute. Comme précédemment, il y a 10 choix possibles.
Ensuite, pour chacune des cinq hauteurs consécutives, on choisit l'une des 4 couleurs, ce qui fait 4^5 choix. Finalement, le nombre de mains correspondant est $10\times4^5=10\,240$, ce qui fait que le nombre de quintes est exactement $10\times4^5-40=10\,200$

5. *brelan : main comprenant 3 cartes de même valeur et qui n'est ni un carré, ni un full (par exemple, 3 as, 1 valet, 1 dix).*
On compte le nombre de mains comprenant 3 cartes de même niveau et qui ne contient pas un carré : il y a 13 choix pour le niveau, $\binom{4}{3}=4$ choix de 3 couleurs parmi 4 pour ce niveau.
Puis, pour les deux autres cartes, il faut choisir deux cartes parmi 48 (on doit exclure la dernière carte de même hauteur, sinon on aurait un carré), soit $\binom{48}{2}=\dfrac{48\times47}{2}=1128$ choix.
Il y a donc $13\times4\times1128=58656$ mains contenant 3 cartes de même niveau, mais pas de carrés.
Pour dénombrer le nombre de brelans, il faut retirer les fulls. Il y a donc
$$58656-3744=54912 \text{ brelans.}$$
Attention au raisonnement faux suivant : on pourrait compter le nombre de mains comprenant 3 cartes de même niveau : il y a 13 choix pour le niveau, $\binom{4}{3}=4$ choix de 3 couleurs parmi 4 pour ce niveau.
Puis, pour les deux autres cartes, il faut choisir deux cartes parmi $52-3=49$, soit $\binom{49}{2}=\dfrac{49\times48}{2}=1176$ choix. Il y a donc $13\times4\times1176=61152$ mains contenant 3 cartes de même niveau. Pour dénombrer le nombre de brelans, il faut retirer les carrés et les fulls. Il y a donc $61152-624-3744=56\,784$ brelans. Ce raisonnement est faux car quand on a compté le nombre de mains contenant 3 cartes de même niveau, on a compté 4 fois chaque carré. En effet, un carré d'as peut apparaitre en choisissant d'abord as de coeur, de carreau, de trèfle, puis en complétant avec as de pique, ou en choisissant as de coeur, de carreau, de pique, puis en complétant avec as de trèfle, etc... Si on veut réaliser un dénombrement correct avec cette méthode, il faut retirer quatre fois le nombre de carrés, et on a bien $61152-4\times624-3744=54912$.

Exercice 2D.5 :

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. *sans imposer de contraintes sur les cartes.*
Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition sur les cartes : un tirage est donc une combinaison de 5 cartes parmi 32. Il y a : $\binom{32}{5}=201376$ tirages différents.

2. *contenant 5 carreaux ou 5 piques.*

Pour obtenir 5 carreaux, il faut choisir 5 cartes parmi 8 : il y a $\binom{8}{5}=56$ tels tirages. De même pour obtenir 5 piques. Comme les deux cas sont disjoints, il y a $2\times\binom{8}{5}=112$ tels tirages différents.

3. *2 carreaux et 3 piques.*
Il y a $\binom{8}{2}$ façons de choisir 2 carreaux parmi 8 puis, pour chacune de ces façons, il y a $\binom{8}{3}$ façons de choisir 3 piques. Le nombre de tirages recherché est donc : $\binom{8}{2}\times\binom{8}{3}=\frac{8\times7}{2}\times\frac{8\times7\times6}{2\times3}=28\times56=1568$

4. *au moins un roi.*
On compte le complémentaire, c'est-à-dire les tirages sans rois : il faut alors choisir 5 cartes parmi 28, il y a $\binom{28}{5}$ tels tirages. Le nombre de tirages recherché est donc :

$$\binom{32}{5}-\binom{28}{5}=103096.$$

5. *au plus un roi.*
On a déjà compté les tirages sans roi. Pour les tirages comprenant un roi, il y a 4 façons de choisir le roi, puis, pour chacune de ces façons, $\binom{28}{4}$ façons de choisir les autres cartes. On en déduit qu'il y a

$$\binom{28}{5}+4\times\binom{28}{4}=180180 \text{ tels tirages.}$$

6. *2 rois et 3 piques (exactement).*
On sépare les tirages contenant le roi de pique et ceux ne contenant pas le roi de pique.

- si le tirage ne contient pas le roi de pique, il y a $\binom{3}{2}$ choix différents de 2 rois parmi 3, puis $\binom{7}{3}$ choix de 3 piques parmi 7 (tous sauf le roi de pique).
- si le tirage contient le roi de pique, il reste $\binom{3}{1}=3$ choix pour le roi différent du roi de pique, puis $\binom{7}{2}$ choix pour les deux autres piques. Cela faisant, on n'a tiré que 4 cartes. Il reste une carte à choisir parmi les 21 autres cartes qui ne sont ni un roi, ni un pique, et donc $\binom{21}{1}=21$ choix (attention à ne pas compter à nouveau deux fois le roi de pique!).

Finalement, le nombre de tirages possibles est :

$$\binom{3}{2}\times\binom{7}{3}+\binom{1}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{7}{2}\times\binom{21}{1}=1428.$$

Exercice 2D.6 :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément une « main » de 5 cartes.

1) *Combien y a-t-il de « mains » possibles ?*
Il s'agit d'un tirage simultané de 5 cartes parmi 32, l'ordre n'est pas important donc c'est une combinaison de 5 éléments parmi 32 :

il y a $\binom{32}{5}=\dfrac{32!}{5!\times 27!}=\dfrac{32\times 31\times 30\times 29\times 28}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}=4\times 31\times 2\times 29\times 28=201\ 376$ mains possibles.

2) *Combien y a-t-il de « mains » contenant :*

a) *exactement 2 piques :*

On veut exactement 2 piques pris parmi les 8 piques et 3 autres cartes qui ne sont pas des piques (parmi les 24 autres cartes qui ne sont pas des piques),

soit : $\binom{8}{2}\times\binom{24}{3}=\dfrac{8}{2!\times 6!}\times\dfrac{24}{3!\times 21!}=\dfrac{8\times 7}{2}\times\dfrac{24\times 23\times 22}{6}=56\ 672$ mains possibles.

b) *2 trèfles et 3 carreaux :*

On veut 2 piques pris parmi les 8 piques et 3 carreaux pris parmi les 8 carreaux,

soit : $\binom{8}{2}\times\binom{8}{3}=\dfrac{8}{2!\times 6!}\times\dfrac{8}{3!\times 5!}=\dfrac{8\times 7}{2}\times\dfrac{8\times 7\times 6}{6}=1\,568$ mains possibles.

c) *les 4 rois :*

On veut 4 rois (pris parmi les 4) et 1 autre carte qui n'est pas un roi (prise parmi les 28 autres), soit :

$$\binom{4}{4}\times\binom{28}{1}=1\times\frac{28}{1!\times 27!}=28 \text{ mains possibles.}$$

d) *au moins 1 dame :*

Prendre au moins une dame, c'est le contraire de ne prendre aucune dame, donc de choisir 5 cartes parmi les 28 autres cartes,

soit : $\binom{32}{5}-\binom{28}{5}=\dfrac{32!}{5!\times 27!}-\dfrac{28!}{5!\times 23!}=201\ 376-98\ 280=103\ 096$ mains possibles.

e) *1 roi et 2 trèfles :*

On peut prendre
$$\begin{cases}\text{1 roi qui ne soit pas de trèfle (parmi 3 rois)}\\ \text{2 trèfles qui ne soient pas le roi (parmi 7 trèfles)}\\ \text{2 cartes qui ne soient ni roi ni trèfle (parmi 21 cartes)}\\ \text{ne pas prendre le roi de trèfle}\end{cases}$$

ou

$$\begin{cases}\text{le roi de trèfle (parmi 1)}\\ \text{1 trèfle qui ne soit pas le roi (parmi 7 trèfles)}\\ \text{3 cartes qui ne soient ni roi ni trèfle (parmi 21 cartes)}\\ \text{0 carte parmi les trois autres rois}\end{cases}$$

soit : $\binom{3}{1}\times\binom{7}{2}\times\binom{21}{2}+\binom{1}{1}\times\binom{7}{1}\times\binom{21}{3}=3\times 21\times 210+1\times 7\times 1330=22\ 540$