Exercices sur le dénombrement et les probabilités

Exercice 2E.1

Le professeur de maths dispose de 6 exercices de dénombrement, 15 exercices d'analyse et 9 exercices de géométrie.

1. Il compose un devoir de fin d'année contenant un exercice de dénombrement, un exercice d'analyse et un exercice de géométrie.
   L'ordre des exercices n'a pas d'importance.
   Combien de devoirs différents peut-il composer ?
2. Le professeur se rend compte que de tels devoir sont trop long. Il pense qu'un devoir contenant exactement 2 exercices de types différents suffit.
   L'ordre des exercices n'a toujours pas d'importance.
   Combien de devoirs différents peut-il finalement composer ?

Exercice 2E.2

1. Un club d'échecs organise un tournoi interne entre ses 10 membres. Chaque joueur doit rencontrer tous les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de parties ?
2. Un club sportif doit envoyer une délégation pour une rencontre à l'étranger. Cette délégation doit être composée de 3 femmes et 2 hommes.
   Le club possède 20 membres, 12 femmes et 8 hommes.
   Combien de délégations différentes sont-elles possibles ?

Exercice 2E.3

On considère l'ensemble $\mathrm{E}=\{a,b,c,d\}$.

1. Combien de parties a cet ensemble E ?
2. Combien de parties à 2 éléments a cet ensemble E ?
   Les énumérer toutes.
3. Le programme en Python qui suit permet d'afficher toutes ces parties à 2 éléments dans la console.

```
L = [ 'a' , 'b' , 'c' , 'd' ]
taille = len(L)
for i in range(taille) :
    for j in ……………………….
        print( '{' , …… , ',' , ……] , '}' )
```

   Compléter les lignes 4 et 5 de ce programme pour qu'il fonctionne correctement.
4. Combien de parties à 3 éléments a cet ensemble E ?
   Les énumérer toutes.
5. Modifier le programme précédent pour qu'il puisse afficher toutes ces parties à 3 éléments dans la console.

Exercice 2E.1

Le professeur de maths dispose de 6 exercices de dénombrement, 15 exercices d'analyse et 9 exercices de géométrie.

1. *Il compose un devoir de fin d'année contenant un exercice de dénombrement, un exercice d'analyse et un exercice de géométrie.*
   L'ordre des exercices n'a pas d'importance.
   Combien de devoirs différents peut-il composer ?
2. *Le professeur se rend compte que de tels devoir sont trop long. Il pense qu'un devoir contenant exactement 2 exercices de types différents suffit.*
   L'ordre des exercices n'a toujours pas d'importance.
   Combien de devoirs différents peut-il finalement composer ?

1. On utilise le **principe multiplicatif**. On calcule : $\binom{6}{1}\times\binom{15}{1}\times\binom{9}{1}=6\times15\times9=810$.
   Le professeur peut composer **810 devoirs différents**.
2. On cherche combien y a-t-il de devoirs contenant un exercice de dénombrement et un exercice d'analyse. On calcule: $6\times15=90$: le professeur peut composer 90 devoirs de ce type.
   On fait de même avec les devoirs contenant un exercice de dénombrement et un exercice de géométrie. On calcule: $6\times9=54$: le professeur peut composer 54 devoirs de ce type.
   On recommence avec les devoirs contenant un exercice d'analyse et un exercice de géométrie. On calcule: $15\times9=135$: le professeur peut composer 135 devoirs de ce type.
   On utilise le **principe additif**.
   $$\binom{6}{1}\times\binom{15}{1}+\binom{6}{1}\times\binom{9}{1}+\binom{15}{1}\times\binom{9}{1}=90+54+135=279$$
   → le professeur peut composer **279 devoirs différents**.

Exercice 2E.2

1. *Un club d'échecs organise un tournoi interne entre ses 10 membres. Chaque joueur doit rencontrer tous les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de parties ?*
2. *Un club sportif doit envoyer une délégation pour une rencontre à l'étranger. Cette délégation doit être composée de 3 femmes et 2 hommes.*
   Le club possède 20 membres, 12 femmes et 8 hommes.
   Combien de délégations différentes sont-elles possibles ?

1. Une partie correspond à une combinaison de 2 éléments parmi 10 (les noms des 2 joueurs, l'ordre n'ayant pas d'importance).
   On calcule donc : $\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!\times8!}=\frac{10\times9}{2}=45$ →le club doit organiser 45 parties.
2. Le choix des femmes correspond à une combinaison de 3 éléments parmi 12 (les noms des 3 femmes, l'ordre n'ayant pas d'importance).
   On calcule donc : $\binom{12}{3}=\frac{12!}{3!\times9!}=\frac{12\times11\times10}{6}=220$.
   Le choix des hommes correspond à une combinaison de 2 éléments parmi 8 (les noms des 2 hommes, l'ordre n'ayant pas d'importance).
   On calcule donc : $\binom{8}{2}=\frac{8!}{2!\times6!}=\frac{8\times7}{2}=28$
   On utilise alors le principe multiplicatif. On calcule :
   $$\binom{12}{3}\times\binom{8}{2}=220\times28=6160$$ →il y a 6160 délégations possibles.

Exercice 2E.3 Avec python

On considère l'ensemble $\mathrm{E} = \{a, b, c, d\}$.

1. ***Combien de parties a cet ensemble E ?***

   Le nombre de parties de E est :
   $$2^{card(\mathrm{E})} = 2^4 = 16.$$
   Comme E a 4 éléments, il possède donc 16 parties.

2. ***Combien de parties à 2 éléments a cet ensemble E ? Les énumérer toutes.***

   Le nombre de parties à deux éléments est donné par le nombre de combinaisons :
   $$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \qquad \rightarrow \text{E possède 6 parties à 2 éléments.}$$
   Il s'agit de : {a,b} , {a,c} , {a,d} , {b,c} , {b,d} , {c,d} .

3. ***Le programme en Python qui suit permet d'afficher toutes ces parties à 2 éléments dans la console. Compléter les lignes 4 et 5 de ce programme pour qu'il fonctionne correctement.***

```
L = [ 'a' , 'b' , 'c' , 'd' ]
taille = len(L)
for i in range(taille) :
   for j in range(i+1 , taille) :
      print( '{' , L[i] , ',' , L[j] , '}' )
```

   On notera que, quel que soit l'ordre dans lequel sont stockés les éléments de E dans la liste, le programme affichera bien toutes les parties prévues....
   Par ailleurs, les experts auront remarqué que range$(\text{taille} - 1)$ aurait suffi dans la ligne 3. En effet, lorsque i vaut $\text{taille} - 1$, j parcourt alors la séquence range $(\text{taille}, \text{taille})$ qui ne contient rien.

4. ***Combien de parties à 3 éléments a cet ensemble E ? Les énumérer toutes.***

   Le nombre de parties à trois éléments est donné par le nombre de combinaisons :
   $$\binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4 \qquad \rightarrow \text{E possède 4 parties à 3 éléments.}$$
   Il s'agit de : {a,b,c} , {a,b,d} , {a,c,d} , {b,c,d} .

5. ***Modifier le programme précédent pour qu'il puisse afficher toutes ces parties à 3 éléments dans la console.***

   Voici le programme modifié pour qu'il puisse afficher toutes ces parties à 3 éléments dans la console.

```
L = [ 'a' , 'b' , 'c' , 'd' ]
taille = len(L)
for i in range(taille) :
   for j in range(i+1 , taille) :
      for k in range(j+1 , taille) :
         print( '{', L[i] , ',' , L[j] , ',' , L[k] , '}' )
```

   On obtient :

```
{ a , b , c }
{ a , b , d }
{ a , c , d }
{ b , c , d }
```