Problèmes généraux du net

Exercice 3A.1

A leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.
Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

Exercice 3A.2

On trace dans un plan $n \geq 3$ droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes). Combien de triangles a-t-on ainsi tracé?

Exercice 3A.3

Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles?

Exercice 3A.4

Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien y-a-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables ?

Exercice 3A.5

Fred et Émile font partie d'une équipe de 8 joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de fabriquer un comité de 3 joueurs.

1. Combien y-a-t-il de comités possibles ?
1. Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille ?
2. Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons ?
3. On veut que Fred et Émile soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?
4. On ne veut pas que Fred et Émile soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?

Exercice 3A.6

Les trois mousquetaires (donc quatre personnes avec d'Artagnan), ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge. D'Artagnan se lève en premier et prend deux bottes au hasard.

1. Combien de possibilités s'offrent à lui ?
2. Combien de choix a-t-il tels que les deux bottes forment une paire (une droite et une gauche quelconques) ?
3. Combien de choix a-t-il tels que les deux bottes appartiennent à deux personnes différentes ?

Exercice 3A.7

Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun "1". Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants :

1. A .
2. A_1, ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres différents.
3. A_2 , ensemble des nombres pairs de A .
1. A_3, ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

CORRIGE du net arrangé – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 3A.1

A leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.
Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

Ce genre d'exercices se traite très facilement en utilisant un tableau à double entrée dans lequel on inscrit les informations à notre disposition :

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3		
Allemand			6	16
Total	12		15	

On complète alors le tableau de proche en proche de sorte d'obtenir les bons totaux sur chaque ligne et chaque colonne. Par exemple, sur la première ligne de la colonne "Chimie", on peut facilement inscrire le chiffre 9. On obtient donc

	Astronomie	Informatique	Chimie	Total
Anglais	8	3	9	20
Allemand	4	6	6	16
Total	12	9	15	36

Exercice 3A.2

On trace dans un plan $n \geq 3$ droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes). Combien de triangles a-t-on ainsi tracé?

Un triangle est déterminé par 3 droites (ses côtés). Il y a autant de triangles que de possibilités de choisir 3 droites parmi *n*, c'est-à-dire $\binom{n}{3}$.

Exercice 3A.3

Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. *Combien y-a-t-il de podiums possibles?*
   Pour le premier, on a 20 choix possibles, pour le second 19, pour le troisième 18.
   Arrangement avec ordre sans remise : le nombre de podiums possibles est donc égal à :
   $$\frac{20!}{(20-3)!} = 20 \times 19 \times 18 = 6840.$$
2. *Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?*
   Le premier concurrent est Emile. Pour les autres places, il y a 19 puis 18 choix possibles.
   Arrangement avec ordre sans remise : le nombre de podiums ainsi constitués est :
   $$\frac{19!}{(19-2)!} = 19 \times 18 = 342.$$
3. *Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?*
   Il y a trois choix possibles pour la place d'Emile. Une fois ce choix fixé, il y a 19 choix possibles pour la première des deux autres places, puis 18 choix possibles pour la seconde des deux autres places. Le nombre de podiums vérifiant ces conditions est :
   $$3 \times 19 \times 18 = 1026.$$

4. *On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?*
   L'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de choix de 3 concurrents parmi 20, c'est-à-dire
   $$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!\times(20-3)!} = \frac{6840}{6} = 1140.$$

Exercice 3A.4

Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien y-a-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables ?

On commence par choisir les personnes qui vont s'installer autour de la première table, sans ordre et sans remise. C'est une combinaison ayant $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\times(7-3)!} = \frac{7\times6\times5}{6} = 35$ possibilités.

Ensuite, les 3 personnes qui sont autour de la première table peuvent choisir librement leur place. Il y a $3! = 6$ choix (autant que de permutations des 3 chaises).
De même, il y $4! = 24$ choix pour les personnes qui s'installent autour de la deuxième table.
Le nombre total de possibilités est donc
$$\binom{7}{3}\times3!\times4! = \frac{7!}{3!\times(7-3)!}\times3!\times4! = \frac{7!}{3!\times4!}\times3!\times4! = 7! = 5040.$$

Le fait de trouver $7!$ montre que le dénombrement que nous avons fait, qui suit les données de l'énoncé, peut être simplifié. En effet, le fait d'imposer deux tables ne change en réalité rien au problème : on doit placer 7 personnes sur 7 chaises, et il y a $7!$ façons différentes de le faire.

Exercice 3A.5

Fred et Émile font partie d'une équipe de 8 joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de fabriquer un comité de 3 joueurs.

1. *Combien y-a-t-il de comités possibles ?*
   Il s'agit de choisir trois joueurs parmi 8. C'est une combinaison sans ordre et sans remise. Le nombre de comités possibles est donc de $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\times(8-3)!} = \frac{8\times7\times6}{6} = 56$.
2. *Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille ?*
   Il s'agit de choisir deux garçons parmi 6, puis une fille parmi 2. Le nombre de choix possibles est donc de $$\binom{6}{2}\times\binom{2}{1} = \frac{6!}{2!\times(6-2)!}\times2 = \frac{6\times5}{2}\times2 = 30.$$
3. *Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons ?*
   On compte le nombre de comités comprenant 3 garçons : il vaut
   $$\binom{6}{3}\times\binom{2}{0} = \frac{6!}{3!\times(6-3)!} = \frac{6\times5\times4}{6} = 20$$ (il faut choisir trois garçons parmi 6).
   On a déjà compté le nombre de comités comprenant exactement deux garçons. Donc le nombre de comités comprenant au moins deux garçons vaut $\binom{6}{2}\times\binom{2}{1}+\binom{6}{3}\times\binom{2}{0} = 30+20 = 50$.
4. *On veut que Fred et Émile soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?*
   Il ne reste qu'à choisir le dernier membre du comité : il y a $\binom{1}{1}\times\binom{1}{1}\times\binom{6}{1} = 6$ comités comprenant à la fois Fred et Émile.

5. *On ne veut pas que Fred et Émile soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?*
On compte les comités comprenant Fred, mais pas Émile, et les comités comprenant Émile, mais pas Fred.
Dans le premier cas, on trouve $\binom{1}{1}\times\binom{1}{0}\times\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\times(6-2)!}=\frac{6\times5}{2}=15$ comités (car il reste à choisir deux joueurs parmi 6, puisqu'on ne peut plus prendre ni Fred, ni Émile).
Dans le second cas, on a aussi $\binom{6}{2}=15$ comités.
On compte enfin les comités ne comprenant ni Fred, ni Émile. Il y en a $\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\times(6-3)!}=20$.
Finalement, le nombre total de comités ne comprenant pas simultanément Émile et Fred est
$$\binom{6}{2}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}=15+15+20=50.$$
Plus simplement, on pouvait aussi soustraire du nombre total de comités (56, cf question 1) le nombre de comités comprenant à la fois Fred et Émile (6, cf question 4), et on retrouve bien $56-6=50$ comités ne comprenant pas simultanément Fred et Émile.

Exercice 3A.6

Les trois mousquetaires (donc quatre personnes avec d'Artagnan), ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge. D'Artagnan se lève en premier et prend deux bottes au hasard.

1. *Combien de possibilités s'offrent à lui ?*
Sélection de deux bottes sans ordre ni remise : Il y a $\binom{8}{2}=\frac{8!}{2!\times(8-2)!}=\frac{8\times7}{2}=28$ choix possibles.
2. *Combien de choix a-t-il tels que les deux bottes forment une paire (une droite et une gauche quelconques) ?*
Il y a $\binom{4}{1}=4$ choix possibles pour une botte gauche et $\binom{4}{1}=4$ choix possibles pour une botte droite.
Le nombre total de choix formant une paire est donc $\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}=16$.
3. *Combien de choix a-t-il tels que les deux bottes appartiennent à deux personnes différentes ?*
Il y a de nombreuses façons de répondre à cette question mais la plus simple est de raisonner par différence. Il y a en effet 4 choix pour que les deux bottes choisies appartiennent à la même personne. Comme il y a d'après la première question 28 choix possible de deux bottes, il y a $28-4=24$ choix possibles de sorte que les deux bottes appartiennent à deux personnes différentes.

Exercice 3A.7

Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun "1". Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants :

1. *A.*
Pour écrire un élément de A, on a :
   - 8 choix pour le premier chiffre (tous sauf 0 et 1),
   - 9 choix pour les 6 autres chiffres (tous sauf 1).

   On a donc $card(\mathrm{A})=8\times9^6$.
2. A_1, *ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres différents.*
Pour écrire un élément de A_1, on a :
   - 8 choix pour le premier chiffre (tous sauf 0 et 1),

- choix ordonnés de 6 éléments distincts parmi les 8 chiffres différents de 1 et du premier chiffre choisi : le nombre d’arrangements est :

$$\frac{8!}{(8-6)!}=20160$$

Ainsi $card\left(\mathrm{A}_1\right)=8\times 20160=161280$.

3. A_2, *ensemble des nombres pairs de A* .

Un élément de A est pair si son chiffre des unités est 0,2,4,6 ou 8. Il y a 5 façons de choisir ce chiffre des unités, 8 façons de choisir le premier chiffre, et 9^5 autres de choisir les autres chiffres. On a donc

$$card\left(\mathrm{A}_2\right)=5\times 8\times 9^5=2361960.$$

4. A_3, *ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).*

Le premier chiffre de A_3 ne peut être ni un 0, ni un 1.

Il y a $\binom{8}{7}=8$ façons de choisir 7 chiffres tous distincts parmi $\{2;3;4;5;6;7;8;9\}$, et une seule façon, ces 7 chiffres choisis, de les écrire en ordre croissant. On a donc

$$card\left(\mathrm{A}_3\right)=\binom{8}{7}=8.$$