Problèmes généraux du net

Exercice 3B.1
Une table ronde comporte cinq places, numérotées de 1 à 5. On veut répartir Adélie, Brigitte, Chafik, Denis et Emilie autour de la table. Mais attention! Denis et Émilie ne s'entendent pas du tout, et il ne faut pas les placer côte à côte!!! Combien y-a-t-il de dispositions possibles ?

Exercice 3B.2
De combien de façons différentes peut-on placer p tours sur un échiquier de taille n de façon à ce qu'elles ne puissent pas se prendre ?

Exercice 3B.3
Dans un lot de 20 pièces fabriquées, 4 sont mauvaises. De combien de façons différentes peut-on en prélever 4 dans les cas suivants :

- **a)** les 4 pièces sont bonnes
- **b)** une au moins d'entre elles est mauvaise.
- **c)** deux au moins sont mauvaises.

Exercice 3B.4
Une classe de 30 élèves, 12 filles et 18 garçons, doit élire un comité composé d'un président, un vice-président et un secrétaire.

- **a)** Combien de comités peut-on constituer ?
- **b)** Combien de comités peut-on constituer sachant que le poste de secrétaire doit être occupé par une fille ?
- **c)** Quel est le nombre de comités comprenant l'élève X ?
- **d)** Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est un garçon et le secrétaire une fille ?
- **e)** Quel est le nombre de comités pour lesquels le président et le vice-président sont de sexes différents ?

Exercice 3B.5
Une assemblée de 15 hommes et 12 femmes désire élire un comité de 6 membres, madame A refuse de siéger dans tout comité dont ferait partie monsieur B.

- **a)** Quel est le nombre de comités qui pourront être constitués dans ces conditions ?
- **b)** Dénombrer ceux de ces comités dont madame A ferait partie.

Exercice 3B.6
15 randonneurs font une excursion en montagne.

1) Ils marchent en file indienne ; de combien de façons peuvent-ils se répartir sur le chemin ?
2) Arrivés au bord d'un torrent, ils décident que seulement 6 d'entre eux feront la traversée. Combien y a-t-il de choix possibles de ces 6 personnes ?

Exercice 3B.1

Une table ronde comporte cinq places, numérotées de 1 à 5. On veut répartir Adélie, Brigitte, Chafik, Denis et Emilie autour de la table. Mais attention! Denis et Émilie ne s'entendent pas du tout, et il ne faut pas les placer côte à côte!!! Combien y-a-t-il de dispositions possibles ?

On va raisonner par différence. Si l'on ne met pas de contraintes, il y a $5!=120$ façons de placer les gens autour de la table (ou permutations).
Comptons maintenant le nombre de façons où Denis et Émilie sont côte à côte. On commence par choisir la position de ce couple. Il y a cinq positions possibles : (1,2), (2,3), (3,4), (4,5) et (5,1).
Cette position fixée, il y a $2!=2$ choix pour placer Denis et Émilie, puis $3!=6$ choix pour placer les autres.
Il y a donc $5\times2\times6=60$ dispositions où Denis et Émilie sont côte à côte.
Finalement, il y a $120-60=60$ dispositions où Émilie et Denis ne sont pas côte à côte!
Remarquons que ce raisonnement dépend du fait que l'on a numéroté les places et donc que, implicitement, la position Adélie 1, Brigitte 2, Chafik 3, Denis 4 et Emilie 5 est différente de la position Adélie 2, Brigitte 3, Chafik 4, Denis 5 et Emilie 1, alors que dans ces deux configurations, tout le monde a le même voisin. Si on ne numérote pas les places, alors on doit diviser le nombre de possibilités pas 5 et il y a 12 configurations différentes.
Une autre possibilité, pour faire le dénombrement, est de choisir d'abord la place de Denis (5 choix), puis la place d'Emile (il ne reste que 2 choix), puis la place des 3 autres (respectivement, 3, 2 et 1 choix). Le nombre de dispositions possibles vaut bien $5\times2\times3\times2=60$.

Exercice 3B.2

De combien de façons différentes peut-on placer p tours sur un échiquier de taille n de façon à ce qu'elles ne puissent pas se prendre ?

Les p tours doivent être sur des lignes différentes. On commence par choisir les p lignes où sont les tours.
Il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles. Une fois ces lignes choisies, on choisit les colonnes où sont les tours.
Pour la tour située sur la première ligne, on a n choix, pour la tour située sur la deuxième ligne, on a $n-1$ choix, et ainsi de suite jusqu'à la p -ième ligne où on a $n-p+1$ choix.
On obtient : $n(n-1)...(n-p+1)$ choix.
Finalement, le nombre total de façons différentes dont l'on peut placer les tours sans qu'elles puissent se prendre est égal à $\binom{n}{p}\times n(n-1)...(n-p+1)$.

Exercice 3B.3

Dans un lot de 20 pièces fabriquées, 4 sont mauvaises. De combien de façons différentes peut-on en prélever 4 dans les cas suivants :

a) *les 4 pièces sont bonnes*

Si l'ordre compte, il y a A_{16}^4 façons de procéder, sinon $\binom{16}{4}$ s'il ne compte pas.

b) *une au moins d'entre elles est mauvaise.*

On prend l'évènement contraire, aucune mauvaise ou quatre bonnes, donc il y a :

$A_{20}^4-A_{16}^4$ si l'ordre compte , $\binom{20}{4}-\binom{16}{4}$ s'il ne compte pas.

c) *deux au moins sont mauvaises.*

L'évènement « deux au moins » est égal à l'évènement « un au moins » moins l'évènement « un exactement » . On choisit une mauvaise parmi 4 : $\binom{4}{1} = 4$ choix, puis trois bonnes parmi 16 : $\binom{16}{3}$.

Si l'ordre compte, il y a 4! permutations.
Le nombre de façons est :

- si l'ordre compte : $A_{20}^4 - A_{16}^4 - 4\times 4!\times\binom{16}{3} = A_{20}^4 - A_{16}^4 - 16A_{16}^3$ car $A_{16}^3 = 3!\times\binom{16}{3}$
- si l'ordre ne compte pas : $\binom{20}{4} - \binom{16}{4} - 4\binom{16}{3}$.

Exercice 3B.4

Une classe de 30 élèves, 12 filles et 18 garçons, doit élire un comité composé d'un président, un vice-président et un secrétaire.

a) *Combien de comités peut-on constituer ?*
L'ordre compte et il n'y a pas de répétition donc les comités sont des arrangements.
Il y a A_{30}^3 comités possibles.

b) *Combien de comités peut-on constituer sachant que le poste de secrétaire doit être occupé par une fille ?*
On choisit une fille parmi 12 donc 12 choix pour la secrétaire puis deux élèves parmi les 29 restants donc : $\binom{12}{1}\times A_{29}^2$.

c) *Quel est le nombre de comités comprenant l'élève X ?*
Il y a 3 postes possibles pour X puis on choisit 2 élèves parmi les 29 restants donc : $3\times A_{29}^2$

d) *Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est un garçon et le secrétaire une fille ?*
Il y a 18 choix pour le président puis 12 pour le secrétaire et il à choisir le vice-président parmi les 28 restants donc : $\binom{12}{1}\times\binom{18}{1}\times\binom{28}{1}$.

e) *Quel est le nombre de comités pour lesquels le président et le vice-président sont de sexes différents ?*

Premier cas : on choisit un garçon puis une fille donc : $\binom{18}{1}\times\binom{12}{1}\times\binom{28}{1}$.

Deuxième cas : on choisit un garçon puis une fille donc : $\binom{12}{1}\times\binom{18}{1}\times\binom{28}{1}$.

Donc : $\binom{18}{1}\times\binom{12}{1}\times\binom{28}{1} + \binom{12}{1}\times\binom{18}{1}\times\binom{28}{1} = 2\times 18\times 12\times 28$.

Exercice 3B.5

Une assemblée de 15 hommes et 12 femmes désire élire un comité de 6 membres, madame A refuse de siéger dans tout comité dont ferait partie monsieur B.

a) *Quel est le nombre de comités qui pourront être constitués dans ces conditions ?*

Le nombre total de comités est : $\binom{27}{6}$.

Le nombre de comités où A et B siégeraient ensemble est :

$\binom{1}{1}\times\binom{1}{1}\times\binom{25}{4}$, les 4 personnes parmi les 25 restantes étant choisies sans ordre.

Le nombre de comités cherché est :

$$\binom{27}{6}-\binom{25}{4}.$$

b) *Dénombrer ceux de ces comités dont madame A ferait partie.*

Si madame A est choisie, il reste à choisir 5 personnes parmi 25 (en excluant A et B) donc :

$$\binom{1}{1}\times\binom{1}{0}\times\binom{25}{5}=\binom{25}{5}.$$

Exercice 3B.6

15 randonneurs font une excursion en montagne.

1) *Ils marchent en file indienne ; de combien de façons peuvent-ils se répartir sur le chemin ?*

Les 15 randonneurs marchent en file indienne donc il y a ordre mais pas répétition, il s'agit ainsi d'une permutation de 15 randonneurs parmi 15 :

il y a $15!$ façons de se répartir.

2) *Arrivés au bord d'un torrent, ils décident que seulement 6 d'entre eux feront la traversée. Combien y a-t-il de choix possibles de ces 6 personnes ?*

Au bord du torrent, on choisit 6 randonneurs parmi 15 sans ordre ni répétition, il s'agit ainsi d'une combinaison de 6 personnes parmi 15 :

il y a $\binom{15}{6}=\dfrac{15!}{6!\times 9!}=\dfrac{15\times14\times13\times12\times11\times10}{2\times3\times4\times5\times6}=7\times13\times11\times5=5\ 005$ choix possibles.