Applications sur les coefficients binomiaux

Exercice 4A.1

Calculer 99^3, 998^2, 13^4, 102^3 et $\left(\frac{7}{6}\right)^3$.

Exercice 4A.2 :

Développer :

1) $(x+2)^5$
2) $(2x-3)^4$

Exercice 4A.3 :

Quel est le coefficient de a^4b^2 dans le développement de $(2a+3b)^6$?

Exercice 4A.4 :

Développer $(a+b)^6$ puis $(2x-1)^5$.

Exercice 4A.5 :

Déterminer le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans le développement de $(a-b+2c)^9$.

Exercice 4A.6 :

Utiliser la formule du binôme de Newton pour montrer que $1,01^{10} \simeq 1,105$.

Trouver de même une valeur approchée de $0,99^8$ à 10^{-3} près.

Exercice 4A.7

Ecrire $\left(1-\sqrt{2}\right)^5$ sous la forme $a+b\sqrt{2}$ avec $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$.

Exercice 4A.8

1) Montrer que $(a+b)^3+(a-b)^3=2a\left(a^2+3b^2\right)$.
2) En déduire que $P(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^3+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^3$ est un polynôme.

Exercice 4A.1

Calculer 99^3, 998^2, 13^4, 102^3 *et* $\left(\frac{7}{6}\right)^3$.

$$99^3=(100-1)^3=100^3-3\times100^2\times1+3\times100\times1^2-1^3=1000\,000-30\,000+300-1=970\,299$$

$$998^2=(1000-2)^2=1000^2-2\times1000\times2+2^2=1000\,000-4000+4=996\,004$$

$$13^4=(10+3)^4=10^4+4\times10^3\times3+6\times10^2\times3^2+4\times10\times3^3+3^4$$
$$=10\,000+12\,000+5\,400+1080+81=28\,561$$

$$102^3=(100+2)^3=100^3+3\times100^2\times2+3\times100\times2^2+2^3=1000\,000+60\,000+1200+8=1061\,208$$

$$\left(\frac{7}{6}\right)^3=\left(1+\frac{1}{6}\right)^3=1^3+3\times1^2\times\frac{1}{6}+3\times1\times\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{216}=\frac{216+108+18+1}{216}=\frac{343}{216}$$

Exercice 4A.2 :

1) $$(x+2)^5=\binom{5}{0}\times x^5\times2^0+\binom{5}{1}\times x^4\times2^1+\binom{5}{2}\times x^3\times2^2+\binom{5}{3}\times x^2\times2^3+\binom{5}{4}\times x^1\times2^4+\binom{5}{0}\times x^0\times2^5$$
$$=x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$$

2) $$(2x-3)^4=\binom{4}{0}\times(2x)^4\times3^0-\binom{4}{1}\times(2x)^3\times3^1+\binom{4}{2}\times(2x)^2\times3^2-\binom{4}{3}\times(2x)^1\times3^3+\binom{4}{4}\times(2x)^0\times3^4$$
$$=16x^4-96x^3+216x^2-216x+81.$$

Exercice 4A.3 :

Quel est le coefficient de a^4b^2 *dans le développement de* $(2a+3b)^6$ *?*

$$\binom{6}{2}\times2^4\times3^2=2160.$$

Exercice 4A.4 :

Développer $(a+b)^6$ *puis* $(2x-1)^5$.

$$(a+b)^6=a^6+\binom{6}{1}a^5b^1+\binom{6}{2}a^4b^2+\binom{6}{3}a^3b^3+\binom{6}{4}a^2b^4+\binom{6}{5}a^1b^5+b^6$$
$$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

$$(2x-1)^5=(2x)^5+\binom{5}{1}(2x)^4(-1)^1+\binom{5}{2}(2x)^3(-1)^2+\binom{5}{3}(2x)^2(-1)^3+\binom{5}{4}(2x)^1(-1)^4+(-1)^5$$
$$=32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1$$

Exercice 4A.5 :

Déterminer le coefficient de $a^4b^2c^3$ *dans le développement de* $(a-b+2c)^9$.

La formule du binôme de Newton donne :

$$(a-b+2c)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(a-b)^k(2c)^{9-k}$$

$$=\binom{9}{0}(a-b)^0(2c)^9+\binom{9}{1}(a-b)^1(2c)^8+\ldots+\binom{9}{6}(a-b)^6\times(2c)^3+\ldots+\binom{9}{9}(a-b)^9(2c)^0$$
$$=(a-b)^9+\ldots+\binom{9}{6}(a-b)^6\times(2c)^3+\ldots+(2c)^9$$

D'autre part :

$$(a-b)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}a^k(-b)^{6-k}$$
$$=a^6+\binom{6}{1}a^5(-b)^1+\ldots+\binom{6}{4}a^4(-b)^2+\ldots+(-b)^6$$

Le coefficient cherché est dans l'expression :

$$\binom{9}{6}(a-b)^6\times(2c)^3\text{ , soit : }\binom{9}{6}\times(2c)^3\times\binom{6}{4}a^4(-b)^2=\binom{9}{6}\times2^3\times\binom{6}{4}a^4b^2c^3$$

Le coefficient cherché est :

$$\binom{9}{6}\times2^3\times\binom{6}{4}=\frac{9\times8\times7}{2\times3}\times8\times\frac{6\times5}{2}=3\times4\times7\times8\times3\times5=10080.$$

Exercice 4A.6 :

Utiliser la formule du binôme de Newton pour montrer que $1,01^{10}\simeq1,105$.

Trouver de même une valeur approchée de $0,99^8$ *à* 10^{-3} *près.*

$$1,01^{10}=\left(1+10^{-2}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\times1^k\times\left(10^{-2}\right)^{10-k}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\times\left(10^{-2}\right)^{10-k}$$

Pour une précision à trois décimales, on va étudier les termes :

$$\binom{10}{10}\times\left(10^{-2}\right)^{10-10}+\binom{10}{9}\times\left(10^{-2}\right)^{10-9}+\binom{10}{8}\times\left(10^{-2}\right)^{10-8}=1+10\times10^{-2}+\frac{10\times9}{2}\times10^{-4}$$
$$=1+0,01+0,0045$$
$$=1,0145$$

$$0,99^8=\left(1-10^{-2}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\times1^k\times\left(-10^{-2}\right)^{8-k}=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\times\left(-10^{-2}\right)^{8-k}$$

Pour une précision à trois décimales, on va étudier les termes :

$$\binom{8}{8}\times\left(-10^{-2}\right)^{8-8}+\binom{8}{7}\times\left(-10^{-2}\right)^{8-7}+\binom{8}{6}\times\left(-10^{-2}\right)^{8-6}=1-8\times10^{-2}+\frac{8\times7}{2}\times10^{-4}$$
$$=1-0,08+0,0028$$
$$=0,9228$$

Exercice 4A.7

Ecrire $\left(1-\sqrt{2}\right)^5$ *sous la forme* $a+b\sqrt{2}$ *avec* $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$.

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^5=1\times1^5-5\times1^4\times\sqrt{2}^1+10\times1^3\times\sqrt{2}^2-10\times1^2\times\sqrt{2}^3+5\times1^1\times\sqrt{2}^4-1\times\sqrt{2}^5$$
$$=1-5\sqrt{2}+10\times2-10\times2\sqrt{2}+5\times2^2-4\sqrt{2}$$
$$=1-5\sqrt{2}+20-20\sqrt{2}+20-4\sqrt{2}$$
$$=41-29\sqrt{2}$$

Exercice 4A.8

1) *Montrer que* $(a+b)^3+(a-b)^3=2a\left(a^2+3b^2\right)$.

2) *En déduire que* $P(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^3+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^3$ *est un polynôme.*

1) $(a+b)^3+(a-b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=2a^3+6ab^2=2a\left(a^2+3b^2\right)$

2) $P(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^3+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^3=2x\left(x^2+3\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2\right)=2x\left(x^2+3\left(1+x^2\right)\right)=2x\left(4x^2+3\right)$