Applications techniques sur les factorielles

Exercice 4B.1 :

Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité :

$$n! \geq e^{-n}(n+1)^n.$$

Exercice 4B.2 :

Montrer que $\dfrac{(2n)!}{n!}$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le calculer pour $n \in \{1;2;3;4\}$.

Exercice 4B.3 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \times n!$ et $\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$.

Exercice 4B.4 :

Montrer que pour tout $n \geq 10$, $n! \geq 9! \times 10^{n-9}$. En déduire la limite de $\dfrac{n!}{9^n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4B.5 :

Montrer, à l'aide de $k! \geq 2^{k-1}$ valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} < 2.$$

Exercice 4B.6 :

L'égalité suivante est vraie :

$$\frac{28}{17} = \frac{(2!)^4 \times (7!)^2 \times 13!}{(3!)^2 \times 5! \times 17!}.$$

Montrer, plus généralement, que tout rationnel strictement positif peut s'écrire comme un produit de factorielles de nombres premiers ou comme le quotient de deux tels produits.

Exercice 4B.7 :

Montrer que tout entier $\mathrm{A} \in \mathbb{N}$ peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$\mathrm{A} = \sum_{k=1}^{n} a_k \times k!$$

avec les conditions :

- $n \in \mathbb{N}^*$
- $0 \leq a_k \leq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
- $a_n \neq 0$

Exercice 4B.8 :

Quels sont les entiers naturels $n \leq 100$ pour lesquels le nombre de chiffres décimaux de $n!$ est précisément égal à n ? Prouver qu'il n'existe aucun entier $n > 100$ vérifiant cette condition.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 4B.1 :

Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *l'inégalité :* $n! \geq e^{-n}(n+1)^n$.

Montrer que $n! \geq e^{-n}(n+1)^n$ équivaut à montrer que : $\dfrac{n!}{e^{-n}(n+1)^n} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{n! \times e^n}{(n+1)^n} \geq 1$.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $u_n = \dfrac{n! \times e^n}{(n+1)^n}$.

On observe que $u_0 = 1$. Montrons que la suite (u_n) est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\dfrac{n! \times e^n}{(n+1)^n}}{\dfrac{(n-1)! \times e^{n-1}}{((n-1)+1)^{n-1}}} = \frac{n! \times e^n}{(n+1)^n} \times \frac{n^{n-1}}{(n-1)! \times e^{n-1}} = ne \times \frac{n^{n-1}}{(n+1)^n} = e \times \frac{1}{\dfrac{(n+1)^n}{n^n}} = e \times \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$$

Soit : $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = e \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.

Passons par les logarithmes :

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \ln\left[e \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right] = \ln e + \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right] = 1 - n\ln\left[1+\frac{1}{n}\right]$$

Or on sait que :

$$\forall t > 0 \ : \ \ln(1+t) \leq t$$

Donc : $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow -n \times \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geq -n \times \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow 1 - n \times \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geq 1-1$

Ainsi : $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \geq 1$

La suite (u_n) est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 = 1$.

Exercice 4B.2 :

Montrer que $\dfrac{(2n)!}{n!}$ *est un entier pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et le calculer pour* $n \in \{1;2;3;4\}$.

$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{1 \times 2 \times \ldots \times n \times (n+1) \times \ldots \times 2n}{n!} = \frac{n! \times (n+1) \times \ldots \times 2n}{n!} = (n+1) \times \ldots \times 2n.$$

$$\frac{(2\times1)!}{1!} = \frac{2!}{1!} = 2$$

$$\frac{(2\times2)!}{2!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

$$\frac{(2\times3)!}{3!} = \frac{6!}{3!} = 120$$

$$\frac{(2\times4)!}{4!} = \frac{8!}{4!} = 1680$$

On remarque que :

$$2 \times 6 = 12 \quad , \quad 12 \times 10 = 120 \quad , \quad 120 \times 14 = 1680$$

$\rightarrow 1680\times 18=\dfrac{(2\times 5)!}{5!}=\dfrac{10!}{5!}=30\,240$.

En définissant la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\dfrac{(2n)!}{n!}$, on a :

$$u_2=u_1\times 2\times 3=u_1\times(2\times 1+1)$$
$$u_3=u_2\times 2\times 5=u_2\times(2\times 2+1)$$
$$u_4=u_3\times 2\times 5=u_3\times(2\times 3+1)$$

Et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}=u_n\times(2n+1)$$

Exercice 4B.3 :

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}(2k)=2^n\times n!$ *et* $\prod_{k=1}^{n}(2k+1)=\dfrac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$.

$$(2k)=(2\times 1)\times(2\times 2)\times\ldots\times(2\times n)=(2\times 2\times\ldots\times 2)\times(1\times 2\times\ldots\times n)=2^n\times n!$$

$$(2k+1)=(2\times 1+1)\times(2\times 2+1)\times\ldots\times(2\times n+1)=\frac{(2n+1)!}{(2\times 1)\times(2\times 2)\times\ldots\times(2\times n)}=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$$

Exercice 4B.4 :

Montrer que pour tout $n\geq 10$, $n!\geq 9!\times 10^{n-9}$ *.En déduire la limite de* $\dfrac{n!}{9^n}$ *lorsque n tend vers* $+\infty$.

$$n\geq 10 \;\Leftrightarrow\; n!\geq 10!\times 10^{n-10} \;\Leftrightarrow\; n!\geq 9!\times 10\times 10^{n-10} \;\Leftrightarrow\; n!\geq 9!\times 10^{n-9}$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{n!}{9^n}\geq\frac{9!\times 10^{n-9}}{9^n} \;\Leftrightarrow\; \frac{n!}{9^n}\geq\frac{9!\times 10^{n-9}}{9^{n-9}\times 9^9} \;\Leftrightarrow\; \frac{n!}{9^n}\geq\frac{9!}{9^9}\times\frac{10^{n-9}}{9^{n-9}}$$

Soit : $\dfrac{n!}{9^n}\geq\dfrac{9!}{9^9}\times\left(\dfrac{10}{9}\right)^{n-9}$.

Le nombre $\dfrac{9!}{9^9}$ est constant, $\dfrac{10}{9}>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{10}{9}\right)^{n-9}=+\infty$.

Par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{9!}{9^9}\times\left(\dfrac{10}{9}\right)^{n-9}=+\infty$.

Et par croissances comparées :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{9^n}=+\infty.$$

Exercice 4B.5 :

Montrer, à l'aide de $k!\geq 2^{k-1}$ *valable pour tout* $k\in\mathbb{N}^*$*, que pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}\leq\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^{k-1}}<2$.

$$k!\geq 2^{k-1} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{k!}\leq\frac{1}{2^{k-1}}$$

Donc : $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}\leq\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^{k-1}}$.

Or $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^{k-1}}=\dfrac{1}{2^{1-1}}+\dfrac{1}{2^{2-1}}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n-1}}$

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2^{1-1}}+\frac{1}{2^{2-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Or $\quad 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1 \Leftrightarrow 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]<2$.

On obtient : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}<2$

Exercice 4B.6 :

L'égalité suivante est vraie :

$$\frac{28}{17}=\frac{(2!)^4\times(7!)^2\times 13!}{(3!)^2\times 5!\times 17!}.$$

Montrer, plus généralement, que tout rationnel strictement positif peut s'écrire comme un produit de factorielles de nombres premiers ou comme le quotient de deux tels produits.

$$\frac{28}{17}=\frac{7\times2^2}{17}=\frac{7\times2^2\times16!}{17!}=\frac{7!\times2^2\times16!}{17!\times6!}=\frac{7!\times2^2\times13!\times14\times15\times16}{17!\times6!}=\frac{7!\times2^2\times13!\times2\times7\times3\times5\times2^4}{17!\times6!}$$

$$=\frac{7!\times2^7\times13!\times7\times3\times5}{17!\times6\times5!}=\frac{7!\times2^7\times13!\times7\times3\times5}{17!\times3!\times5!}=\frac{7!\times2^7\times13!\times7!}{17!\times3!\times5!\times2\times4\times6}$$

$$=\frac{(7!)^2\times2^6\times13!}{17!\times3!\times5!\times4\times6}=\frac{(7!)^2\times2^4\times13!}{17!\times3!\times5!\times6}=\frac{(7!)^2\times(2!)^4\times13!}{17!\times(3!)^2\times5!}$$

Exercice 4B.7 :

Montrer que tout entier $\mathrm{A}\in\mathbb{N}$ peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$\mathrm{A}=\sum_{k=1}^{n}a_k\times k!$$

avec les conditions :

- $n\in\mathbb{N}^*$
- $0\leq a_k\leq k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$
- $a_n\neq 0$

Exercice 4B.8 :

Quels sont les entiers naturels $n\leq 100$ pour lesquels le nombre de chiffres décimaux de $n!$ est précisément égal à n ? Prouver qu'il n'existe aucun entier $n>100$ vérifiant cette condition.