Exercices sur les coefficients binomiaux

Exercice 4C.1 - Une extension de la formule du triangle de Pascal

Soit E l'ensemble à 12 éléments $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l\}$.

1. Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent
   a) a et b ;
   b) a mais pas b ;
   c) b mais pas a ;
   d) ni a, ni b.
2. En déduire la relation
$$\binom{12}{5}=\binom{10}{3}+2\binom{10}{4}+\binom{10}{5}.$$
3. Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour $2\le p\le n$, on a
$$\binom{n}{p}=\binom{n-2}{p-2}+2\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p}$$
4. Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule du triangle de Pascal.

Exercice 4C.2 - Une formule

Soit $1\le p\le n$. On considère n boules et deux boîtes A et B. Un échantillon est constitué d'une boule dans la boîte A et de $p-1$ boules dans la boîte B. En dénombrant de deux façons différentes ces échantillons, établir la formule
$$n\binom{n-1}{p-1}=p\binom{n}{p}.$$
Retrouver cette formule par le calcul.

Exercice 4C.3 - Dans un livre

Un livre comporte 14 chapitres.

1. Combien y-a-t-il de façons de choisir 3 chapitres dans ce livre ?
2. Pour $k=3,4,...,14$, dénombrer les choix de 3 chapitres pour lesquels k est le plus grand numéro des chapitres choisis.
3. En déduire que
$$\binom{14}{3}=\binom{13}{2}+\binom{12}{2}+...+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}.$$
4. Généraliser les dénombrements précédents pour démontrer que, pour $1\le p\le n$, on a
$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 4C.4 - Une extension de la formule du triangle de Pascal

Soient p, q, des entiers naturels, avec $q\le p\le m$. Démontrer par un dénombrement que
$$\binom{m}{p}=\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}\times\binom{m-q}{p-j}.$$

Exercice 4C.5 - Bizarre, bizarre, ...

Démontrer par un dénombrement que, pour $n\ge 1$, on a :
$$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Exercice 4C.6 - Une somme

Soit n, p des entiers naturels avec $n\ge p$. Démontrer par dénombrement que : $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$.

Coefficients binomiaux comme chemins dans l'arbre

Exercice 4C.7 - Somme des coefficients binomiaux au carré

Soit n un entier non nul. On considère l'arbre modélisant la répétition de $2n$ épreuves aléatoires identiques d'un schéma de Bernoulli.

1. Dans cet arbre, quel est le nombre de chemins avec exactement n succès ?
2.
   a) Quel est le nombre de chemins permettant d'obtenir 0 succès lors des n premières épreuves, puis n succès lors des n dernières épreuves ?

   b) Dans cet arbre, que vaut le produit $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$ pour k entier naturel compris entre 0 et n ?
3. Déduire des questions précédentes l'expression de la somme suivante en fonction de n :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 .$$

Exercice 4C.1

Soit E l'ensemble à 12 éléments $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l\}$.

1. *Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent*
   a) *a et b ;*
   b) *a mais pas b ;*
   c) *b mais pas a ;*
   d) *ni a, ni b.*
2. *En déduire la relation* $\binom{12}{5}=\binom{10}{3}+2\binom{10}{4}+\binom{10}{5}$.
3. *Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour* $2\le p\le n$, *on a*
$$\binom{n}{p}=\binom{n-2}{p-2}+2\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p}$$
5. *Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule du triangle de Pascal.*

1. **a)** Deux éléments sont fixés, il reste à choisir 3 éléments parmi 10 sans ordre, soit $\binom{10}{3}$ parties.

b) Un élément est déjà choisi, il reste à en choisir 4 parmi 10 (puisque *b* est exclu et qu'on ne peut bien sûr pas reprendre *a*). Il y a donc $\binom{10}{4}$ telles parties.

c) Il y a donc aussi $\binom{10}{4}$ telles parties.

d) On doit cette fois choisir 5 éléments parmi 10 : il y a $\binom{10}{5}$ parties ne comprenant ni *a* ni *b*.

2. Il y a $\binom{12}{5}$ parties à 5 éléments de *E*. Mais on a réalisé une partition de ces parties :

a) celles qui contiennent *a* et *b*,
b) celles qui contiennent seulement un des deux éléments,
c) celles qui ne contiennent aucun des deux.

D'où la formule demandée.

3. On part cette fois d'un ensemble à *n* éléments dont on fixe deux éléments *a* et *b*. Le nombre de parties à *p* éléments de cet ensemble est $\binom{n}{p}$. On réalise une partition de ces parties en les parties :

a) contenant *a* et *b* : il y en a $\binom{n-2}{p-2}$ (il reste $p-2$ éléments à choisir parmi $n-2$) ;

b) contenant *a* mais pas *b*: il y en a $\binom{n-2}{p-1}$;

c) contenant *b* mais pas *a* : il y en a $\binom{n-2}{p-1}$;

d) ne contenant ni *a*, ni *b* : il y en a $\binom{n-2}{p}$.

Faisant la somme, on trouve bien la formule voulue.

4. On applique trois fois la relation du triangle de Pascal : une fois dans la première ligne, deux fois dans la deuxième :

$$\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n-2}{p-2}+\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p}$$

ce qui après regroupement donne la formule voulue.

Exercice 4C.2 - Une formule

Soit $1\leq p\leq n$. On considère n boules et deux boîtes A et B. Un échantillon est constitué d'une boule dans la boîte A et de $p-1$ boules dans la boîte B. En dénombrant de deux façons différentes ces échantillons, établir la formule $n\binom{n-1}{p-1}=p\binom{n}{p}$.

Retrouver cette formule par le calcul.

Voici deux façons de compter le nombre d'échantillons.

- On choisit d'abord une boule à mettre dans la boîte A : il y a n choix possibles. Puis on choisit $p-1$ boules parmi les $n-1$ boules restantes pour mettre dans la boîte B. Il y a donc $n\times\binom{n-1}{p-1}$ échantillons.
- On choisit d'abord les p boules parmi n qui seront dans la boite B : il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles. Puis on choisit parmi ces p boules celle à mettre dans la boîte A : il y a p choix possibles, et donc le nombre d'échantillons recherché est $p\times\binom{n}{p}$.

Puisqu'on compte de deux façons différentes le même nombre d'échantillons, on obtient bien le résultat escompté. Par le calcul, on a

$$n\binom{n-1}{p-1}=n\times\frac{(n-1)!}{(p-1)!\times((n-1)-(p-1))!}=\frac{n!}{(p-1)!\times(n-p)!}=p\times\frac{n!}{p!\times(n-p)!}=p\binom{n}{p}.$$

Exercice 4C.3 - Dans un livre

Un livre comporte 14 chapitres.

1. *Combien y-a-t-il de façons de choisir 3 chapitres dans ce livre ?*
2. *Pour $k=3,4,\ldots,14$, dénombrer les choix de 3 chapitres pour lesquels k est le plus grand numéro des chapitres choisis.*
3. *En déduire que* $\binom{14}{3}=\binom{13}{2}+\binom{12}{2}+\ldots+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}$.
4. *Généraliser les dénombrements précédents pour démontrer que, pour $1\leq p\leq n$, on a*
$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}.$$

1. Sélection de trois chapitres sans ordre : Il y en a exactement $\binom{14}{3}$.
2. Une fois le numéro k du plus grand chapitre choisi, il reste 2 chapitres à choisir parmi $k-1$: il y a donc exactement $\binom{k-1}{2}$ choix de chapitres dont le dernier porte le numéro k.
3. On réalise une partition de l'ensemble des parties à 3 éléments en fixant le plus grand élément valant de 3 à 14. On a donc
$$\binom{14}{3}=\sum_{k=3}^{14}\binom{k-1}{2}.$$

4. On part cette fois d'un livre comprenant $n+1$ chapitres et on en sélectionne $p+1$. Il y a $\binom{n+1}{p+1}$ choix possibles. On étudie ensuite le nombre de choix possibles où le plus grand des chapitres porte le numéro k, pour k allant de $p+1$ à $n+1$: il y en a $\binom{k-1}{p}$ (reste p chapitres à choisir parmi ceux numérotés de 1 à $k-1$). On a donc

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p+1}^{n+1} \binom{k-1}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Exercice 4C.4 - Une extension de la formule du triangle de Pascal

Soient p, q, des entiers naturels, avec $q \le p \le m$. Démontrer par un dénombrement que

$$\binom{m}{p} = \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \times \binom{m-q}{p-j}.$$

On va s'inspirer de la démonstration de la formule du triangle de Pascal. Soit E un ensemble ayant m éléments, et F une partie de E ayant q éléments. On cherche le nombre de parties de E ayant exactement p éléments.

- Une telle partie peut ne contenir aucun élément de F. Il y a exactement $\binom{m-q}{p}$ telles parties.
- Une telle partie peut contenir exactement un élément de F. On a $\binom{q}{1}$ choix pour cet élément, et $\binom{m-q}{p-1}$ choix pour les autres.
- Plus généralement on compte le nombre de parties à p éléments de E contenant exactement k éléments de F. Il y a $\binom{q}{k}$ possibilités pour choisir ces éléments de F, et $\binom{m-q}{p-k}$ possibilités pour choisir les autres éléments (ils sont $p-k$, à choisir parmi $m-q$). Le nombre de parties recherché dans ce cas est donc $\binom{q}{k} \times \binom{m-q}{p-k}$.

Faisant la somme pour k de 0 à q, on trouve la formule souhaitée. Remarquons que ce dénombrement fonctionne même si $p > m-q$, à condition d'utiliser la convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$.

Exercice 4C.5 - Bizarre, bizarre, ...

Démontrer par un dénombrement que, pour $n \ge 1$, on a :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 .$$

$\binom{2n}{n}$ est le nombre de parties à n éléments dans un ensemble à $2n$ éléments. Pour compter ce nombre de parties, on peut aussi diviser l'ensemble en deux sous-ensembles contenant chacun n éléments.

Pour obtenir n éléments, on peut en prendre k dans le premier, ie $\binom{n}{k}$ choix, et $n-k$ dans le deuxième, soit $\binom{n}{n-k}$ choix. On a donc :

$$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\binom{n}{n-k}.$$

Or $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ donc :

$$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 .$$

On peut aussi démontrer ce résultat sans dénombrement en remarquant que $\binom{2n}{n}$ est le coefficient devant x^n du polynôme $(x+1)^{2n}$. On retrouve l'autre valeur en écrivant $(x+1)^{2n}=(x+1)^n\times(x+1)^n$ et en identifiant.

Exercice 4C.6 - Une somme

Soit n, p des entiers naturels avec $n\geq p$. Démontrer par dénombrement que

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}.$$

Le coefficient binomial $\binom{n+1}{p+1}$ désigne le nombre de parties à $p+1$ éléments dans l'ensemble $\{0,1,\dots,n\}$ qui a $n+1$ éléments. Soit E une telle partie, et k le plus grand entier qu'elle contient. Puisque la partie contient p+1 éléments, on a $k\geq p$. De plus, cet élément choisi, il reste p éléments à choisir dans l'ensemble $\{0,1,\dots,k-1\}$ qui contient k éléments, c'est-à-dire qu'il reste $\binom{k}{p}$ choix.

Une autre méthode pour démontrer cette propriété est de procéder par récurrence sur n.
La formule est clairement vraie pour $n=0$ (ce qui implique $p=0$).

Supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire que pour tout $p\leq n$, $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$.

Prouvons-la au rang $n+1$. Pour cela, prenons $p\leq n+1$. Si $p\leq n$, alors on a :

$$\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p}=\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}+\binom{n+1}{p} \quad \text{: on utilise l'hypothèse de la récurrence :}$$

$$=\binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p} \quad \text{: formule du triangle de Pascal}$$

$$=\binom{n+2}{p+1}$$

La formule est aussi vérifiée. La propriété est donc aussi vraie au rang $n+1$.
On peut aussi démontrer la formule par "télescopage" en remarquant que, pour $k>p$, on a

$$\binom{k+1}{p+1}=\binom{k}{p}+\binom{k}{p+1} \Leftrightarrow \binom{k}{p}=\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}$$

et donc que

$$\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p}=\binom{p}{p}+\sum_{k=p+1}^{n}\binom{k}{p}$$
$$=1+\sum_{k=p+1}^{n}\left[\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right]$$
$$=1+\binom{p+2}{p+1}-\binom{p+1}{p+1}+\binom{p+3}{p+1}-\binom{p+2}{p+1}+\ldots+\binom{n+1}{p+1}-\binom{n}{p+1}$$
$$=1-\binom{p+1}{p+1}+\binom{n+1}{p+1}$$
$$=\binom{n+1}{p+1}$$

Exercice 4C.7 - Somme des coefficients binomiaux au carré

Soit n un entier non nul. On considère l'arbre modélisant la répétition de 2n épreuves aléatoires identiques d'un schéma de Bernoulli.

1. *Dans cet arbre, quel est le nombre de chemins avec exactement n succès ?*
2.
   a) *Quel est le nombre de chemins permettant d'obtenir 0 succès lors des n premières épreuves, puis n succès lors des n dernières épreuves ?*
   b) *Dans cet arbre, que vaut le produit* $\binom{n}{k}\times\binom{n}{n-k}$ *pour k entier naturel compris entre 0 et n ?*
3. *Déduire des questions précédentes l'expression de la somme suivante en fonction de n :*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

1. Dans cet arbre, le nombre de chemins avec exactement n succès est $\binom{2n}{n}$.

2.

a. Il y a un seul chemin qui permette d'obtenir cela. Les n premières épreuves se terminent toutes par un échec, les n suivantes se terminent toutes par un succès.

b. On va compter le nombre de chemins qui comporte k succès lors des n premières épreuves puis $n-k$ succès lors des n dernières. Il y a $\binom{n}{k}$ chemins qui comporte k succès lors des n premières épreuves. Un tel chemin étant fixé, il y a $\binom{n-k}{k}$ façons de le terminer par un chemin comportant $n-k$ succès lors des n dernières épreuves. Le produit $\binom{n}{k}\times\binom{n-k}{k}$ est donc égal au nombre de chemins comportant k succès lors des n premières épreuves puis $n-k$ succès lors des n dernières.

3. Comptons de deux façons différentes le nombre de chemins dans l'arbre de Bernoulli à $2n$ épreuves comportant exactement n succès. Il y en a $\binom{2n}{n}$.

On réalise maintenant une partition de ces chemins en fonction du nombre k de succès au cours des n premières épreuves : il y a donc les chemins amenant 0 succès lors des n premières épreuves, les chemins amenant 1 succès, ..., les chemins amenant n succès. L'entier $0\le k\le n$ étant fixé, il y a exactement $\binom{n}{k}\times\binom{n}{n-k}$ tels chemins, puisque les n dernières épreuves doivent nécessairement amener $n-k$ succès. On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}.$$

On conclue en utilisant la symétrie des coefficients binomiaux

$$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}.$$