Problèmes généraux du net

Exercice 4D.1

Soit n un entier non nul. On désigne par u_n le nombre de listes de n termes, chaque terme étant 0 ou 1, et n'ayant pas deux termes 1 consécutifs.

1. Que vaut u_1 ? u_2 ?
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, on a $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
3. Écrire un algorithme permettant de calculer u_{20}.
4. Application : un concours comporte vingt questions, numérotées de 1 à 20. On a constaté que, parmi les 17 712 personnes ayant participé au concours, aucune n'a répondu juste à deux questions consécutives. Peut-on affirmer que deux candidats au moins ont répondu de la même manière au questionnaire, c'est-à-dire juste aux mêmes questions et faux aux mêmes questions ?

Exercice 4D.2

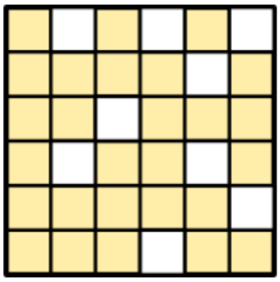
Dans ma maison, il y a un escalier de 17 marches. Pour descendre cet escalier, je peux à chaque pas descendre une marche, descendre deux marches, ou descendre trois marches à la fois.
Combien y-a-t-il de façons de descendre cet escalier ?

Dénombrement et cryptographie

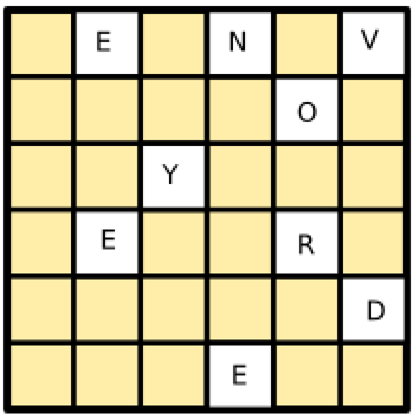
Exercice 4D.3

Les grilles tournantes, mises au point par le colonel Fleissner, servirent pour une méthode de cryptographie qui fut utilisée par les allemands lors de la Première Guerre Mondiale. Une telle grille est constituée par un carré de côté 6. On divise ce carré en une grille de 36 petits carrés égaux (tous de côté 1), et on ôte 9 de ces carrés. La propriété suivante doit être vérifiée : les trous que l'on obtient avec la grille en position initiale, avec la grille tournée d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quart de tour ne se superposent jamais. Ainsi, les 36 positions peuvent être occupées par un trou après éventuellement une rotation de la grille d'un quart, d'un demi ou de trois-quart de tour.

1. Combien peut-on fabriquer de telles grilles ?
2. Pour quelles valeurs de n peut-on fabriquer une grille de Fleissner de côté n ? Combien de telles grilles peut-on alors fabriquer ?



Voyons par exemple comment coder `ENVOYER DES RENFORTS ET DES MUNITIONS` avec la grille précédente. La première étape donne :



Les 3 étapes suivantes donnent :

		S			R
			E		
N					F
		O		R	
	T				S

		E			
T					
	D			E	
			S		
	M				
U		N		I	

T				I	
	O		N		
S					M
		D			
U			E		

Remarquez que l'on doit compléter le message par des lettres factices pour remplir la dernière grille.
Maintenant, si on ôte la grille, il reste sur la feuille de papier les lettres suivantes, disposées en carré :

T	E	E	N	I	V
T	O	S	N	O	R
S	D	Y	E	E	M
N	E	D	S	R	F
U	M	O	E	R	D
U	T	N	E	I	S

Le message chiffré est lu de gauche à droite et de haut en bas :

TEENI VTOSN ORSDY EEMNE DSRFU MOERD UTNEI S

Si le message fait plus de 36 lettres, on répète plusieurs fois le même procédé.

Pour déchiffrer un message, on fait les opérations en sens inverse. On commence par disposer les 36 premières lettres sous la forme d'un carré 6×6. On pose la grille, les 9 trous découvrent les 9 premières lettres du message clair. On tourne la grille d'un quart de tour, et on obtient les 9 lettres suivantes, et ainsi de suite…
Ce déchiffrement est très bien expliqué par Jules Verne dans Mathias Sandorf.

CORRIGE du net arrangé – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 4D.1

Soit n un entier non nul. On désigne par u_n le nombre de listes de n termes, chaque terme étant 0 ou 1, et n'ayant pas deux termes 1 consécutifs.

1. *Que vaut u_1 ? u_2 ?*
2. *Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, on a $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.*
3. *Écrire un algorithme permettant de calculer u_{20}.*
4. *Application : un concours comporte vingt questions, numérotées de 1 à 20. On a constaté que, parmi les 17 712 personnes ayant participé au concours, aucune n'a répondu juste à deux questions consécutives. Peut-on affirmer que deux candidats au moins ont répondu de la même manière au questionnaire, c'est-à-dire juste aux mêmes questions et faux aux mêmes questions ?*

1. Il y a deux listes possibles à 1 terme et aucune ne comporte deux 1 consécutifs : $\{0;1\}$. Donc $u_1 = 2$.

Il y a quatre listes à 2 termes, dont une seule comporte deux 1 consécutifs : $\{00;01;10\}$. Donc $u_2 = 3$

2. Considérons une liste à *n* termes n'ayant pas deux 1 consécutifs :

- ou bien ces termes se terminent par le terme 1 : le terme précédent est donc forcément un 0, et pour les $n-2$ premiers termes, la seule contrainte est qu'il n'y ait pas deux 1 consécutifs. Il y a donc u_{n-2} telles listes,
- ou bien ces termes se terminent par un 0. Il n'y a pas de contraintes sur les $n-1$ premiers termes, si ce n'est qu'il ne faut pas qu'il y ait deux 1 consécutifs. Il y a donc u_{n-1} telles listes.

On a donc réalisé une partition des listes à *n* termes ne comportant pas deux 1 consécutifs, et

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

3.

```
Variables :
 U entier
 V entier
 W entier
 N entier
Traitement
  2->U
  3->V
  Pour N allant de 3 à 20 faire
    U+V->W
    V->U
    W->V
  Fin Pour
  Afficher V
```

→ $u_{20} = 17711$

4. On peut associer à chaque questionnaire une liste de 0 et de 1, le *i*-ème terme vaut 1 si la réponse est juste, et 0 si la réponse est fausse. L'énoncé nous dit que les 17 712 listes obtenues ne comportent pas deux termes 1 consécutifs. Or on a obtenu $u_{20} = 17711$ telles listes différentes.

Deux des listes doivent donc être identiques, et il y a bien deux candidats qui ont répondu de la même manière aux questions.

Exercice 4D.2

Dans ma maison, il y a un escalier de 17 marches. Pour descendre cet escalier, je peux à chaque pas descendre une marche, descendre deux marches, ou descendre trois marches à la fois.
Combien y-a-t-il de façons de descendre cet escalier ?

Notons $S(n)$ le nombre de façons de descendre un escalier à *n* marches.

On a $S(1)=1$, $S(2)=2$ (ou bien on descend deux fois une marche, ou bien on descend deux marches d'un coup), et $S(3)=4$ (ou bien notre premier pas descend de trois marches, et on a fini, ou bien il descend de deux marches, et il reste un escalier à une marche à descendre, ou bien il descend d'une seule marche, et il reste encore un escalier de deux marches à descendre. Autrement dit, $S(3)=1+1+S(2)=4$).

Cherchons maintenant une formule de récurrence pour $S(n)$ lorsque n est supérieur ou égal à 4. On raisonne en fonction du premier pas :

- ou bien on descend une seule marche : dans ce cas, il reste un escalier à $n-1$ marches à descendre, et donc $S(n-1)$ possibilités ;
- ou bien on descend deux marches : dans ce cas, il reste un escalier à $n-2$ marches à descendre, et donc $S(n-2)$ possibilités ;
- ou bien on descend trois marches : dans ce cas, il reste un escalier à $n-3$ marches à descendre, et donc $S(n-3)$ possibilités.

On a donc la formule de récurrence :

$$S(n)=S(n-1)+S(n-2)+S(n-3)$$

Il nous faut calculer $S(17)$. Plusieurs méthodes sont possibles. On peut par exemple utiliser un algorithme sous Python :

```
def S(n):
      if n<1:
           return 0
      elif n==1:
           return 1
      elif n==2:
           return 2
      elif n==3:
           return 4
      else:
           return S(n-1)+S(n-2)+S(n-3)
```

On trouve $S(17)=19513$.

On pouvait aussi utiliser un tableur en rentrant 1 dans la cellule A1, 2 dans la cellule A2, 4 dans la cellule A3, =A1+A2+A3 dans la cellule A4, et en étirant cette cellule vers le bas.

Exercice 4D.3

Les grilles tournantes, mises au point par le colonel Fleissner, servirent pour une méthode de cryptographie qui fut utilisée par les allemands lors de la Première Guerre Mondiale. Une telle grille est constituée par un carré de côté 6. On divise ce carré en une grille de 36 petits carrés égaux (tous de côté 1), et on ôte 9 de ces carrés. La propriété suivante doit être vérifiée : les trous que l'on obtient avec la grille en position initiale, avec la grille tournée d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quart de tour ne se superposent jamais. Ainsi, les 36 positions peuvent être occupées par un trou après éventuellement une rotation de la grille d'un quart, d'un demi ou de trois-quart de tour.

1. *Combien peut-on fabriquer de telles grilles ?*
2. *Pour quelles valeurs de n peut-on fabriquer une grille de Fleissner de côté n ? Combien de telles grilles peut-on alors fabriquer ?*

1. On a $4\times 9=36$ choix pour placer le premier trou. On ne peut ensuite plus choisir ni ce carré, ni les 3 carrés obtenus à partir de celui-ci par rotation. Il reste donc $4\times 8=32$ choix pour placer le second trou. On a ensuite $4\times 7=28$ choix pour placer le troisième trou, et ainsi de suite... jusque 4 choix pour placer le 9ème trou.
Mais attention! Ce faisant, on compte certaines grilles deux fois. En effet, on obtient la même grille si on échange le premier trou et le deuxième trou.... Il faut diviser donc le total obtenu par le nombre de permutations possibles entre les 9 trous, soit 9! Finalement, le nombre de grilles possibles est

$$\frac{4\times 9\times 4\times 8\times 4\times 7\times ...\times 4\times 1}{9!}=\frac{4^9\times 9!}{9!}=4^9.$$

2. Si on veut construire une grille de Fleissner, il faut pouvoir réaliser $\frac{n^2}{4}$ trous (pour qu'avec les 4 positions, on puisse obtenir n^2 trous). Ainsi, n doit être pair (et dans ce cas, n^2 est bien un multiple de 4).

Ensuite, on procède comme dans le cas précédent : on a $n^2=4\times\frac{n^2}{4}$ choix pour le premier carré, $n^2-4=4\times\left(\frac{n^2}{4}-1\right)$ choix pour le deuxième carré, ...

En n'oubliant pas de diviser par la factorielle de $\frac{n^2}{4}$, on obtient que le nombre de grilles est $4^{\frac{n^2}{4}}$.