Choisir *k* éléments par *n*

Sans ordre	Avec ordre Sans répétition	Avec ordre avec répétition	Nombre de permutations
$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$	$n(n-1)(n-k+1)$	n^k	$n!$

Principe multiplicatif :

Etape 1 :	Etape 2 :	Total
n choix	m choix	n×m choix

Exercice 3C.1

Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E, on note $card(E)=n$, $card(A)=a$, $card(B)=b$ et $card(A\cup B)=c$.

Calculer $card(\overline{A}\cap B)$, $card(\overline{B}\cap A)$, $card(\overline{A}\cap \overline{B})$, $card(\overline{A}\cup B)$, $card(\overline{B}\cup A)$, $card(\overline{A}\cup \overline{B})$ en fonction de *a*, *b*, *c* et *n*.

Exercice 3C.2

On dispose de trois chambres et de cinq camarades.

1) De combien de façons distinctes peut-on faire dormir les cinq amis ?
2) Même question si l'on suppose qu'Enguerrand ne se sépare jamais de Calixte pour des raisons qui les regardent.
3) Idem mais en supposant que le couple précédent est, la nuit, incompatible avec les autres.

Exercice 3C.3

Quel est le nombre de grilles possibles au loto ? (7 numéros, 49 possibles)

Exercice 3C.4

Déterminer le nombre de mains possibles (au premier tour) au poker (5 cartes sur 52).

Exercice 3C.5

Déterminer le nombre de nombres palindromes à 351 chiffres ?
Parmi ceux-là, quelle est la plus petite différence entre deux d'entre eux ?

Exercice 3C.6

Le chef du personnel d'une entreprise vient d'embaucher 18 ouvriers qu'il doit répartir entre les 4 ateliers de l'usine. Sachant qu'il doit affecter au moins 4 personnes à l'atelier 1, au moins 2 personnes aux ateliers 2 et 3 et au moins une personne à l'atelier 4, de combien de façons peut-il le faire en supposant que l'on ne s'intéresse qu'au nombre de personne par atelier et que le fait de savoir qui est à un atelier ne nous intéresse pas ?

Exercice 3C.7

Un facteur arrive dans le hall d'un immeuble. Il doit distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façon peut-il le faire sachant que :

1) Chaque boîte aux lettres peut contenir au plus un prospectus et
   a) les prospectus sont distincts ;
   b) les prospectus sont identiques.
2) Chaque boîte aux lettres peut contenir un nombre quelconque de prospectus et
   a) les prospectus sont distincts ;
   b) les prospectus sont identiques.

Exercice 3C.1

Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E, on note $card(E)=n$, $card(A)=a$, $card(B)=b$ *et* $card(A\cup B)=c$.

Calculer $card(\overline{A}\cap B)$, $card(\overline{B}\cap A)$, $card(\overline{A}\cap\overline{B})$, $card(\overline{A}\cup B)$, $card(\overline{B}\cup A)$, $card(\overline{A}\cup\overline{B})$ *en fonction de a, b, c et n.*

Propriété :

$$card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)$$
$$\Leftrightarrow\ c=a+b-card(A\cap B)$$
$$\Leftrightarrow\ card(A\cap B)=a+b-c$$

A et $\overline{A}$ forment une partition donc :

$$card(A\cap B)+card(\overline{A}\cap B)=card(B)$$
$$\Leftrightarrow\ a+b-c+card(\overline{A}\cap B)=b$$
$$\Leftrightarrow\ card(\overline{A}\cap B)=c-a$$

B et $\overline{B}$ forment une partition donc :

$$card(B\cap A)+card(\overline{B}\cap A)=card(A)$$
$$\Leftrightarrow\ a+b-c+card(\overline{B}\cap A)=a$$
$$\Leftrightarrow\ card(\overline{B}\cap A)=c-b$$

$$card(\overline{A}\cap\overline{B})=card(\overline{A\cup B})=card(E)-card(A\cup B)=n-c$$

$$card(\overline{A}\cup B)=card(\overline{A})+card(B)-card(\overline{A}\cap B)=card(E)-card(A)+card(B)-card(\overline{A}\cap B)$$
$$=n-a+b-(c-a)=n-a+b-c+a=n+b-c$$

$$card(\overline{B}\cup A)=card(\overline{B})+card(A)-card(\overline{B}\cap A)=card(E)-card(B)+card(A)-card(\overline{B}\cap A)$$
$$=n-b+a-(c-b)=n-b+a-c+b=n+a-c$$

$$card(\overline{A}\cup\overline{B})=card(\overline{A\cap B})=card(E)-card(A\cap B)=n-(a+b-c)=n-a-b+c$$

Exercice 3C.2

On dispose de trois chambres et de cinq camarades.

1) *De combien de façons distinctes peut-on faire dormir les cinq amis ?*
2) *Même question si l'on suppose qu'Enguerrand ne se sépare jamais de Calixte pour des raisons qui les regardent.*
3) *Idem mais en supposant que le couple précédent est, la nuit, incompatible avec les autres.*

1) L'énoncé n'émet aucune contrainte, les cinq camarades peuvent dormir dans la même chambre.
Chaque ami choisit une chambre : il s'agit d'une répartition avec ordre et avec remise :

$$3^5=243.$$

2) On considère les deux parties Enguerrand et Calixte d'une part et les trois autres amis d'autre part :
Enguerrand et Calixte n'ont que 3 possibilités.
Les trois autres amis sont toujours dans une répartition avec ordre et avec remise : $3^3=27$
En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de combinaisons est :

$$5\times3^3=5\times27=135$$

3) On considère les deux parties Enguerrand et Calixte d'une part et les trois autres amis d'autre part :

Enguerrand et Calixte n’ont que 3 possibilités.

Les trois autres amis sont toujours dans une répartition avec ordre et avec remise dans les deux autres chambres : $2^3 = 8$ En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de combinaisons est :

$$5 \times 2^3 = 5 \times 8 = 40$$

Exercice 3C.3

Quel est le nombre de grilles possibles au loto ? (7 numéros, 49 possibles)

Il s’agit d’un tirage sans remise et sans ordre :

$$\binom{49}{7} = \frac{49!}{7! \times 42!} = 85900584 \text{ combinaisons.}$$

Exercice 3C.4

Déterminer le nombre de mains possibles (au premier tour) au poker (5 cartes sur 52).

Il s’agit d’une distribution sans remise et sans ordre :

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{5! \times (32-5)!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 201376 \text{ combinaisons.}$$

Exercice 3C.5

Déterminer le nombre de nombres palindromes à 351 chiffres (nombres qui peuvent se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche en gardant la même valeur) ?
Parmi ceux-là, quelle est la plus petite différence entre deux d'entre eux ?

On dénombre 10 possibilités pour le chiffre central : de 0 à 9.

On souhaite que la série des $\frac{350}{2} = 175$ premiers chiffres soit symétrique à l’ordre inversé des 175 derniers chiffres. Le problème se résume à énumérer le nombre de combinaisons des 175 premiers chiffres en sachant que la série ne peut commencer par un zéro, il s’agit de sélections avec remise avec 9 possibilités pour le premier chiffre et 10 possibilités pour les 174 autres chiffres :

$$9^1 \times 10^{174} = 9 \times 10^{174} \text{ possibilités.}$$

On applique le principe multiplicatif pour le chiffre central. Le nombre de palindromes est :

$$10 \times 9 \times 10^{174} = 9 \times 10^{175}.$$

Exercice 3C.6

Le chef du personnel d'une entreprise vient d'embaucher 18 ouvriers qu'il doit répartir entre les 4 ateliers de l'usine. Sachant qu'il doit affecter au moins 4 personnes à l'atelier 1, au moins 2 personnes aux ateliers 2 et 3 et au moins une personne à l'atelier 4, de combien de façons peut-il le faire en supposant que l'on ne s'intéresse qu'au nombre de personne par atelier et que le fait de savoir qui est à un atelier ne nous intéresse pas ?

Il doit y avoir au moins 4 personnes à l’atelier 1 et au maximum, il peut y en avoir 13.
Il doit y avoir au moins 2 personnes à l’atelier 2 et au maximum, il peut y en avoir 11.
Il doit y avoir au moins 2 personnes à l’atelier 3 et au maximum, il peut y en avoir 11.
Il doit y avoir au moins 1 personne à l’atelier 4 et au maximum, il peut y en avoir 10.
Ainsi : 9 personnes ont des placements attribués collectivement, sans remise et sans ordre :

$$\binom{18}{4} \times \binom{14}{2} \times \binom{12}{2} \times \binom{10}{1} \times 4^9$$

Exercice 3C.7

Un facteur arrive dans le hall d'un immeuble. Il doit distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façon peut-il le faire sachant que :

1) *Chaque boîte aux lettres peut contenir au plus un prospectus et*
   a) *les prospectus sont distincts ;*
   b) *les prospectus sont identiques.*
2) *Chaque boîte aux lettres peut contenir un nombre quelconque de prospectus et*
   a) *les prospectus sont distincts ;*
   b) *les prospectus sont identiques.*

1) a) Au plus un prospectus par boite aux lettres et les prospectus sont distincts : c'est une distribution sans remise avec ordre :

$$A_{10}^{7}=\frac{10!}{(10-7)!}=\frac{10!}{3!}=10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4=604800 \text{ possibilités.}$$

b) Au plus un prospectus par boite aux lettres et les prospectus sont distincts : c'est une distribution sans remise et sans ordre :

$$\binom{10}{7}=\frac{10!}{7!\times(10-7)!}=\frac{10\times 9\times 8}{3!}=240\,.$$

2) a) Un nombre quelconque de prospectus par boite aux lettres et les prospectus sont distincts : c'est une distribution avec remise et avec ordre :

$$10^{7}=10\,000\,000 \text{ possibilités.}$$

b) Un nombre quelconque de prospectus par boite aux lettres et les prospectus sont identiques : c'est une distribution avec remise et sans ordre :

$$\Gamma_{10}^{7}=\binom{10+7-1}{7}=\binom{16}{7}=11440 \text{ possibilités. (NB : formule hors-programme)}$$