Exercices sur les puissances – Olympiades de mathématiques

Exercice 1.1 : Résoudre : $x^x = 3^{18}$

Exercice 1.2 : Résoudre : $27^x = \dfrac{1}{x}$

Exercice 1.3 : Résoudre : $8^x + 2^x = 68$

Exercice 1.4 : Résoudre : $4^x = \sqrt{32}$

Exercice 1.5 : **Olympiades de mathématiques**
Résoudre : $36^x - 4^y = 272$

Exercice 1.6 : **Olympiades de mathématiques**
Résoudre : $2^{3^{4x}} = 4^{3^{2x}}$

Exercice 1.7 : **Olympiades de mathématiques**
Résoudre : $\begin{cases} x^y = 10^6 \\ y = 1 + \log x \end{cases}$

Exercice 1.8 : Résoudre : $4^x - 8^x = 2$

Exercice 1.9 : **Olympiades de mathématiques**
Résoudre : $\dfrac{8^x - 2^x}{6^x - 3^x} = 2$

Exercice 1.10 : **Olympiades de mathématiques**
Résoudre : $x^y - y^x = 17$

Exercice 1.11 : **Olympiades de mathématiques**
Résoudre : $3^n + 2^n = 35$, $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 1.12 : **Olympiades de mathématiques**
Résoudre : $4^n - 3^n = 7$, $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 1.13 : Résoudre : $3^{3x} - 3^{2x} = 3^x$

Exercice 1.14 : **Olympiades de mathématiques**
Résoudre : $x^{x^{x^4}} = 4$

Exercice 1.15 : Résoudre : $2^x + 4^x = 8^x$

Exercice 1.16 : Résoudre : $2^{x^2} \times 5^x = 10$

Exercice 1.17 : A partir du système : $\begin{cases} 2^{x+y} = 3 \\ 3^{x-y} = 4 \end{cases}$, déterminer : $x^2 - y^2$.

Exercice 1.18 : Résoudre : $x \times 256^x = 1$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – Florent Quet

Exercice 1.1 : *Résoudre :* $x^x = 3^{18}$

$$\begin{aligned} & x^x = 3^{18} \\ \Leftrightarrow\ & x^x = \left(3^2\right)^9 \\ \Leftrightarrow\ & x^x = 9^9 \end{aligned}$$

Si $x > 0$, alors $x = 9$

Exercice 1.2 : *Résoudre :* $27^x = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} & 27^x = \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow\ & \left(27^x\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow\ & 27 = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow\ & 3^3 = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Soit : $\frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Exercice 1.3 : *Résoudre :* $8^x + 2^x = 68$

On pose : $y = 2^x$

$$\begin{aligned} & 8^x + 2^x = 68 \\ \Leftrightarrow\ & \left(2^3\right)^x + 2^x = 68 \\ \Leftrightarrow\ & 2^{3x} + 2^x = 68 \\ \Leftrightarrow\ & \left(2^x\right)^3 + 2^x = 68 \\ \Leftrightarrow\ & y^3 + y - 68 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y^3 + y - 64 - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y^3 - 4^3 + y - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (y-4)\left(y^2 + 4y + 4^2\right) + (y-4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (y-4)\left(y^2 + 4y + 16 + 1\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (y-4)\left(y^2 + 4y + 17\right) = 0 \end{aligned}$$

Soit $y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4$

Soit : $y^2 + 4y + 17 = 0 \rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 17 = 16 - 67 = -51$: il n'y a pas de racine réelle.

On utilise la relation :

$$y = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$$

Exercice 1.4 : *Résoudre* : $4^x = \sqrt{32}$

$$
\begin{aligned}
& 4^x = \sqrt{32} \\
\Leftrightarrow\ & \left(2^2\right)^x = \sqrt{2^5} \\
\Leftrightarrow\ & 2^{2x} = 2^{\frac{5}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & 2x = \frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

Exercice 1.5 : *Résoudre* : $36^x - 4^y = 272$

$$
\begin{aligned}
& 36^x - 4^y = 272 \\
\Leftrightarrow\ & \left(6^2\right)^x - \left(2^2\right)^y = 272 \\
\Leftrightarrow\ & 6^{2x} - 2^{2y} = 272 \\
\Leftrightarrow\ & \left(6^x\right)^2 - \left(2^y\right)^2 = 272
\end{aligned}
$$

On pose : $\mathrm{X} = 6^x$ et $\mathrm{Y} = 2^y$. Ainsi :

$$\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 = 16 \times 17 = 4^2 \times 17.$$

On doit résoudre séparément l'équation :

$$
\begin{aligned}
& m^2 - n^2 = 17 \\
\Leftrightarrow\ & (m+n)(m-n) = 17 \quad \text{avec : } m+n > m-n
\end{aligned}
$$

Donc : $\begin{cases} m+n=17 \\ m-n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=17 \\ 2m=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=17-9=8 \\ m=9 \end{cases}$

Et on vérifie :

$$m^2 - n^2 = 9^2 - 8^2 = 87 - 64 = 17$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 = 4^2 \times 17 \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 = 4^2 \times \left(9^2 - 8^2\right) \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 = 4^2 \times 9^2 - 4^2 \times 8^2 \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 = (4 \times 9)^2 - (4 \times 3)^2 \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 = 36^2 - 32^2
\end{aligned}
$$

On obtient :

$$\mathrm{X} = 36 \text{ et } \mathrm{Y} = 32.$$

Or : $\mathrm{X} = 6^x$ et $\mathrm{Y} = 2^y$. Donc :

$$6^x = 36 \Leftrightarrow 6^x = 6^2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$2^y = 32 \Leftrightarrow 2^y = 2^5 \Leftrightarrow y = 5$$

Ainsi :

$$36^2 - 4^5 = 272$$

Exercice 1.6 : *Résoudre* : $2^{3^{4x}} = 4^{3^{2x}}$

$$
\begin{aligned}
& 2^{3^{4x}} = 4^{3^{2x}} \\
\Leftrightarrow\ & 2^{3^{4x}} = \left(2^2\right)^{3^{2x}}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{3^{4^x}} = 2^{2\times 3^{2^x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3^{4^x} = 2\times 3^{2^x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3^{4^x}}{3^{2^x}} = \frac{2\times 3^{2^x}}{3^{2^x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3^{4^x - 2^x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(3^{4^x-2^x}\right) = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(4^x - 2^x\right)\ln 3 = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4^x - 2^x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2^2\right)^x - 2^x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2^x\right)^2 - 2^x - \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0$$

On pose : $y = 2^x$. On obtient :

$$y^2 - y - \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0$$

Discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times\left(-\frac{\ln 2}{\ln 3}\right) = 1 + 4\frac{\ln 2}{\ln 3} \rightarrow \Delta > 0 \text{ donc deux solutions :}$$

$$y_1 = \frac{1-\sqrt{1+4\frac{\ln 2}{\ln 3}}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{1+\sqrt{1+4\frac{\ln 2}{\ln 3}}}{2} > 0$$

Or : $y = 2^x$, donc la solution négative y_1 ne peut être retenue.

$$2^x = \frac{1+\sqrt{1+4\frac{\ln 2}{\ln 3}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{x+1} = 1+\sqrt{1+4\frac{\ln 2}{\ln 3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(2^{x+1}\right) = \ln\left(1+\sqrt{1+4\frac{\ln 2}{\ln 3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)\ln 2 = \ln\left(1+\sqrt{1+4\frac{\ln 2}{\ln 3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln\left(1+\sqrt{1+4\frac{\ln 2}{\ln 3}}\right)}{\ln 2} - 1$$

Exercice 1.7 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $\begin{cases} x^y = 10^6 \\ y = 1+\log x \end{cases}$

$$\begin{cases} x^y = 10^6 \\ y = 1+\log x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log\left(x^y\right) = \log\left(10^6\right) \\ y = 1 + \log x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \log x = 6 \log 10 \\ y = 1 + \log x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \log x = 6 \\ \log x = y - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(y-1) = 6 \\ \log x = y - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 6 = 0 \\ \log x = y - 1 \end{cases}$$

Discriminant :

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 \rightarrow \Delta > 0$ donc deux solutions :

$y_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $y_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3$

Or : $\log x = y - 1$, donc :

Pour $y_1 = -2$, $\log x = -2 - 1 \Leftrightarrow x = 10^{-3}$.

Pour $y_2 = 3$, $\log x = 3 - 1 \Leftrightarrow x = 10^2$.

Exercice 1.8 : *Résoudre* : $4^x - 8^x = 2$

$$4^x - 8^x = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(2^2\right)^x - \left(2^3\right)^x = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - \left(2^x\right)^3 = 2$$

On pose : $y = 2^x$. On obtient :

$$-y^3 + y^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -y^3 + y^2 - 1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -y^3 - 1^3 + y^2 - 1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(y+1)\left(y^2 - y + 1\right) + (y+1)(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)\left(-y^2 + y - 1 + y - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)\left(-y^2 + 2y - 2\right) = 0$$

Soit : $y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$

Soit : $-y^2 + 2y - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 4 - 8 = -4$: il n'y a pas de solution réelle

Or : $y = 2^x$, ainsi :

$2^x = -1$: non réalisable

Il n'y a pas de solution réelle.

Les solutions imaginaires vérifient :

$2^x = -1$ et $2^x = 1 + i$

Exercice 1.9 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $\dfrac{8^x-2^x}{6^x-3^x}=2$

x doit être différent de 0 en raison du dénominateur non nul.

$$\frac{8^x-2^x}{6^x-3^x}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2^3\right)^x-2^x}{(2\times 3)^x-3^x}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2^x\right)^3-2^x}{2^x\times 3^x-3^x}=2$$

On pose : $a=2^x$ et $b=3^x$:

$$\frac{a^3-a}{a\times b-b}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\left(a^2-1\right)}{b(a-1)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a+1)(a-1)}{b(a-1)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a+1)}{b}=2$$

$$\Leftrightarrow a(a+1)=2b$$

$$\Leftrightarrow 2^x\left(2^x+1\right)=2\times 3^x$$

Or : $2^x\left(2^x+1\right)\in\{2;6;20;72;...\}$

$2\times 3^x\in\{2;6;18;54;...\}$

Et si $x>2$, $2^x\left(2^x+1\right)$ sera au moins divisible par 4, mais 2×3^x ne pourra l'être.

On obtient une solution, 0 étant exclu :

$$x=1.$$

Exercice 1.10 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $x^y-y^x=17$

$$x^y-y^x=17$$

$$\Leftrightarrow \left(x^{\frac{y}{2}}\right)^2-\left(y^{\frac{x}{2}}\right)^2=17$$

On pose : $a=x^{\frac{y}{2}}$ et $b=y^{\frac{x}{2}}$. On obtient :

$$a^2-b^2=17$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)=17$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=17\\ a-b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=17\\ 2a=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=17-9=8\\ a=9\end{cases}$$

Ainsi :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{\frac{y}{2}} = 9 \\ y^{\frac{x}{2}} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^{\frac{y}{2}}\right)^2 = 9^2 \\ \left(y^{\frac{x}{2}}\right)^2 = 8^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^y = 81 = 3^4 \\ y^x = 64 = 4^3 \end{cases}$$

Donc : $x = 3$ et $y = 4$.

Exercice 1.11 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $3^n + 2^n = 35$, $n \in \mathbb{Z}$

$$3^n + 2^n = 35$$

$$\Leftrightarrow \left(3^{\frac{n}{3}}\right)^3 + \left(2^{\frac{n}{3}}\right)^3 = 35$$

On pose : $x = 3^{\frac{n}{3}}$ et $y = 2^{\frac{n}{3}}$. On obtient :

$$x^3 + y^3 = 35$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = 35$$

Or : $x + y < x^2 - xy + y^2$, sauf si $x = y = 1$ et pour $x = 2^{\frac{n}{3}}$ or $y = 3^{\frac{n}{3}}$ donc :

1er cas :

Soit : $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2 - xy + y^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow 3xy = -34$

$$\Leftrightarrow xy = -\frac{34}{3}$$

2ème cas :

Soit : $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 5^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow 3xy = 18$

$$\Leftrightarrow xy = 6$$

Ainsi : $\begin{cases} x+y=5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5-x \\ x(5-x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5-x \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$

Discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4\times1\times6 = 25 - 24 = 1$ donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{d'où : } y_1 = 5 - x_1 = 5 - 2 = 3$$

et $$x_2 = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{d'où : } y_2 = 5 - x_2 = 5 - 3 = 2$$

Or: $x = 3^{\frac{n}{3}}$ et $y = 2^{\frac{n}{3}}$. donc :

$3^{\frac{n}{3}} = 2$ n'a pas de solution

$3^{\frac{n}{3}} = 3 \Leftrightarrow \frac{n}{3} = 1 \Leftrightarrow n = 3$, avec $y = 2^{\frac{n}{3}} = 2 \Leftrightarrow \frac{n}{3} = 1 \Leftrightarrow n = 3$.

La solution est $n = 3$.

Exercice 1.12 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $4^n - 3^n = 7$, $n \in \mathbb{Z}$

$$4^n - 3^n = 7$$

$$\Leftrightarrow \left(4^{\frac{n}{2}}\right)^2 - \left(3^{\frac{n}{2}}\right)^2 = 7$$

On pose : $x = 4^{\frac{n}{2}}$ et $y = 3^{\frac{n}{2}}$. On obtient :

$$x^2 - y^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 7$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ 2x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-4=3 \\ x=4 \end{cases}$$

Or : $x = 4^{\frac{n}{2}}$ et $y = 3^{\frac{n}{2}}$. Donc :

$$x = 4^{\frac{n}{2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{n}{2} = 1 \Leftrightarrow n = 2$$

$$y = 3^{\frac{n}{2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{n}{2} = 1 \Leftrightarrow n = 2$$

Exercice 1.13 : *Résoudre* : $3^{3x} - 3^{2x} = 3^x$

$$3^{3x} - 3^{2x} = 3^x$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x\right)^3 - \left(3^x\right)^2 = 3^x$$

On pose : $y = 3^x$. On obtient :

$$y^3 - y^2 = y$$

$$\Leftrightarrow y^3 - y^2 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow y\left(y^2 - y - 1\right) = 0$$

Soit : $y = 0$

Soit : $y^2 - y - 1 = 0$ → $\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times(-1) = 5$: donc deux solutions

$$y_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ et } y_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 .$$

Or : $y = 3^x > 0$.

On ne retient que la deuxième solution :

$$3^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \ln\left(3^x\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow x \times \ln(3) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(1+\sqrt{5}\right) - \ln 2}{\ln 3}$$

Exercice 1.14 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $x^{x^{x^4}} = 4$

On pose : $u = x^4$. On obtient :

$$x^4 - u = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2\right)^2 - \left(\sqrt{u}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+\sqrt{u}\right)\left(x^2-\sqrt{u}\right)=0$$

Soit : $x=\sqrt{\sqrt{u}}=\sqrt[4]{u}=u^{\frac{1}{4}}$, soit : $x=-\sqrt{\sqrt{u}}=-\sqrt[4]{u}=-u^{\frac{1}{4}}$.

En repartant du problème initial $x^{x^{x^4}}=4$ avec $x=u^{\frac{1}{4}}$, on observe que :

$$x^x=\left(u^{\frac{1}{4}}\right)^{u^{\frac{1}{4}}} \quad \text{et} \quad x^4=\left(u^{\frac{1}{4}}\right)^4=u\,.$$

On obtient :

$$x^{x^{x^4}}=4 \Leftrightarrow \left(\left(u^{\frac{1}{4}}\right)^{u^{\frac{1}{4}}}\right)^u=4 \Leftrightarrow \left(u^{\frac{1}{4}}\right)^{u^{\frac{u}{4}}}=4 \Leftrightarrow \left(\left(u^{\frac{1}{4}}\right)^{u^{\frac{u}{4}}}\right)^4=4^4$$

$$\Leftrightarrow \left(u^{\frac{1}{4}}\right)^{4\times u^{\frac{u}{4}}}=4^4 \Leftrightarrow u^{u^{\frac{u}{4}}}=4^{4^1}$$

Par identification, on trouve :

$$\frac{u}{4}=1 \Leftrightarrow u=4$$

Donc : $\quad u=x^4 \Leftrightarrow x=u^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{1}{4}}=\sqrt{\sqrt{4}}=\sqrt{2}$

En repartant du problème initial $x^{x^{x^4}}=4$ avec $x=-u^{\frac{1}{4}}$, on obtient :

$$x=-\sqrt{2}$$

Les solutions sont :

$$S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$$

Exercice 1.15 : *Résoudre* : $2^x+4^x=8^x$

$$2^x+4^x=8^x$$
$$\Leftrightarrow 2^x+2^x\times 2^x=2^x\times 2^x\times 2^x$$
$$\Leftrightarrow 2^x+\left(2^x\right)^2=\left(2^x\right)^3$$

On pose : $y=2^x$. On obtient :

$$y+y^2=y^3$$
$$\Leftrightarrow y^3-y^2-y=0$$
$$\Leftrightarrow y\left(y^2-y-1\right)=0$$

Soit : $y=0$

Soit : $y^2-y-1=0 \rightarrow \Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-1)=5$: donc deux solutions

$$y_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0 \quad \text{et} \quad y_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0\,.$$

Or : $y=2^x$. La première solution négative ne peut être retenue. Ainsi :

$$2^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 2^{x+1}=1+\sqrt{5} \Leftrightarrow \ln\left(2^{x+1}\right)=\ln\left(1+\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow (x+1)\ln 2=\ln\left(1+\sqrt{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x+1=\frac{\ln\left(1+\sqrt{5}\right)}{\ln 2} \Leftrightarrow x=\frac{\ln\left(1+\sqrt{5}\right)}{\ln 2}-1$$

Exercice 1.16 : *Résoudre :* $2^{x^2}\times 5^x=10$

$$2^{x^2}\times 5^x=10$$
$$\Leftrightarrow\ 2^{x^2}\times 5^x=2\times 5$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{2^{x^2}}{2}=\frac{5}{5^x}$$
$$\Leftrightarrow\ 2^{x^2-1}=5^{1-x}$$
$$\Leftrightarrow\ 2^{(x+1)(x-1)}=5^{1-x}$$
$$\Leftrightarrow\ 2^{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{5^{x-1}}$$
$$\Leftrightarrow\ \left(2^{(x+1)(x-1)}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left(\frac{1}{5^{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$
$$\Leftrightarrow\ 2^{x+1}=\frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow\ 2^{x+1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow\ 2^x=\frac{1}{10}$$
$$\Leftrightarrow\ \ln\left(2^x\right)=\ln\left(\frac{1}{10}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ x\ln 2=-\ln 10$$
$$\Leftrightarrow\ x=-\frac{\ln 10}{\ln 2}$$

Deuxième méthode :

$$2^{x^2}\times 5^x=10$$
$$\Leftrightarrow\ \ln\left(2^{x^2}\times 5^x\right)=\ln 10$$
$$\Leftrightarrow\ x^2\times\ln 2+x\times\ln 5=\ln 10$$
$$\Leftrightarrow\ x^2\times\ln 2+x\times\ln 5-\ln 10=0$$

Discriminant :

$\Delta=(\ln 5)^2-4\times\ln 2\times(-\ln 10)=(\ln 5)^2+4\times\ln 2\times\ln 10$: donc deux solutions

$$\Delta=(\ln 5)^2+4\times\ln 2\times\ln(2\times 5)=(\ln 5)^2+4\times(\ln 2)^2+4\times\ln 2\times\ln 5=(\ln 5+2\ln 2)^2$$

$$x_1=\frac{-\ln 5-(\ln 5+2\ln 2)}{2\times\ln 2}=\frac{-2\ln 5-2\ln 2}{2\times\ln 2}=\frac{-\ln 10}{\ln 2}$$

et $x_2=\dfrac{-\ln 5+(\ln 5+2\ln 2)}{2\times\ln 2}=\dfrac{2\ln 2}{2\times\ln 2}=1$

Avec cette méthode, on trouve deux solutions :

$$S=\left\{1;-\frac{\ln 10}{\ln 2}\right\}$$

Exercice 1.17 : *A partir du système :* $\begin{cases} 2^{x+y} = 3 \\ 3^{x-y} = 4 \end{cases}$*, déterminer :* $x^2 - y^2$.

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 3 \\ 3^{x-y} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2^{x+y}\right)^{\frac{1}{x+y}} = 3^{\frac{1}{x+y}} \\ \left(3^{x-y}\right)^{\frac{1}{x-y}} = 4^{\frac{1}{x-y}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3^{\frac{1}{x+y}} \\ 3 = \left(2^2\right)^{\frac{1}{x-y}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3^{\frac{1}{x+y}} \\ 3 = 2^{\frac{2}{x-y}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3^{\frac{1}{x+y}} \\ 3 = \left(3^{\frac{1}{x+y}}\right)^{\frac{2}{x-y}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3^{\frac{1}{x+y}} \\ 3 = 3^{\frac{2}{(x+y)(x-y)}} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} 2 = 3^{\frac{1}{x+y}} \\ 1 = \dfrac{2}{(x+y)(x-y)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3^{\frac{1}{x+y}} \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$$

Deuxième méthode :

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 3 \\ 3^{x-y} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(2^{x+y}\right) = \ln 3 \\ \ln\left(3^{x-y}\right) = \ln 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\ln 2 = \ln 3 \\ (x-y)\ln 3 = \ln 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{\ln 3}{\ln 2} \\ x-y=\dfrac{\ln 4}{\ln 3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{\ln 3}{\ln 2} \\ 2x=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}+\dfrac{\ln 4}{\ln 3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln 3}{\ln 2}+\dfrac{\ln 4}{\ln 3}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln 3}{\ln 2}-\dfrac{\ln 4}{\ln 3}\right) \\ x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln 3}{\ln 2}+\dfrac{\ln 4}{\ln 3}\right) \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} x^2-y^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}+\frac{\ln 4}{\ln 3}\right)\right)^2-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}-\frac{\ln 4}{\ln 3}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)^2+2\times\frac{\ln 3}{\ln 2}\times\frac{\ln 4}{\ln 3}+\left(\frac{\ln 4}{\ln 3}\right)^2-\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)^2+2\times\frac{\ln 3}{\ln 2}\times\frac{\ln 4}{\ln 3}-\left(\frac{\ln 4}{\ln 3}\right)^2\right] \\ &= \frac{\ln 3}{\ln 2}\times\frac{\ln 4}{\ln 3} \\ &= \frac{\ln\left(2^2\right)}{\ln 2} \\ &= \frac{2\ln 2}{\ln 2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Exercice 1.18 : *Résoudre* : $x\times 256^x=1$

La solution doit être non nulle.

$$\begin{aligned} & x\times 256^x=1 \\ \Leftrightarrow\ & \ln\left(x\times 256^x\right)=\ln 1 \\ \Leftrightarrow\ & \ln x+\ln\left(256^x\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \ln x+x\ln 256=0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\ln x}{x}+\frac{x\ln 256}{x}=\frac{0}{x} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\ln x}{x}+\ln 256=0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{x}\times\ln x=-\ln 256 \\ \Leftrightarrow\ & \ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)=\ln\frac{1}{256} \\ \Leftrightarrow\ & x^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{256} \\ \Leftrightarrow\ & x^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{4^4} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^{\frac{1}{x}}} = 4^4$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 4^4$$

Ainsi :

$$\frac{1}{x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}$$

Deuxième méthode :

$$x \times 256^x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 256^x = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(256^x\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4^4 = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}$$