Exercices sur les puissances et les radicaux – Olympiades de mathématiques

Exercice 2.1

Résoudre l'équation : $8^{x^3} = 2^{x^2}$

Exercice 2.2

Factoriser au maximum l'expression : $x^4 + 4y^4$.

Exercice 2.3

Résoudre l'équation : $5^x + 5^{x+1} = 750$.

Exercice 2.4

Résoudre l'équation : $a^2 + \dfrac{1}{a^2} + b^2 + \dfrac{1}{b^2} = 4$.

Exercice 2.5

Résoudre l'équation : $\sqrt{x} + \sqrt{x^2} = \sqrt{x^3} + \sqrt{x^4}$.

Exercice 2.6

Simplifier l'expression : $\sqrt{13 - \sqrt{105}}$.

Exercice 2.7

Simplifier l'expression : $\sqrt{9999^2 + 19999}$.

Exercice 2.8

Simplifier l'expression : $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$.

Exercice 2.9 Olympiades de mathématiques

Résoudre l'équation : $a + b = \sqrt{21 + ab}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2.10

Résoudre l'équation : $\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}} = 2$.

Exercice 2.11 Olympiades de mathématiques

Résoudre le système : $\begin{cases} a - b = 11 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 11 \end{cases}$.

Exercice 2.12 Olympiades de mathématiques 2023

Simplifier l'expression : $\dfrac{2019}{2020} + \sqrt{\dfrac{2019^2}{2020^2} + 2019^2 + 1}$.

Exercice 2.1

Résoudre l'équation : $8^{x^3} = 2^{x^2}$

$$
\begin{aligned}
& 8^{x^3} = 2^{x^2} \\
\Leftrightarrow\ & \left(2^3\right)^{x^3} = 2^{x^2} \\
\Leftrightarrow\ & 2^{3x^3} = 2^{x^2} \\
\Leftrightarrow\ & 3x^3 = x^2 \\
\Leftrightarrow\ & 3x^3 - x^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 \times 3x - x^2 \times 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2(3x-1) = 0
\end{aligned}
$$

Soit : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Soit : $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

Vérifications :

$$8^{0^3} = 1 = 2^{0^2}$$

$$8^{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3^3}} = 2^{3\times\frac{1}{3^3}} = 2^{\frac{1}{3^2}} = 2^{\frac{1}{9}} \quad \text{et} \quad 2^{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 2^{\frac{1}{3^2}} = 2^{\frac{1}{9}}$$

Exercice 2.2

Factoriser au maximum l'expression : $x^4 + 4y^4$.

$x^4 + 4y^4 = \left(x^2\right)^2 + (2y)^2$ → il s'agit presque d'une identité remarquable

$$
\begin{aligned}
x^4 + 4y^4 &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 \\
&= \left(x^2 + 2y^2\right)^2 - (2xy)^2 \\
&= \left(x^2 + 2y^2 + 2xy\right)\left(x^2 + 2y^2 - 2xy\right) \\
&= \left(x^2 + 2xy + y^2 + y^2\right)\left(x^2 - 2xy + y^2 + y^2\right) \\
&= \left((x+y)^2 + y^2\right)\left((x-y)^2 + y^2\right)
\end{aligned}
$$

Exercice 2.3

Résoudre l'équation : $5^x + 5^{x+1} = 750$.

$$
\begin{aligned}
& 5^x + 5^{x+1} = 750 \\
\Leftrightarrow\ & 1 \times 5^x + 5 \times 5^x = 750 \\
\Leftrightarrow\ & (1+5) \times 5^x = 750 \\
\Leftrightarrow\ & 6 \times 5^x = 750 \\
\Leftrightarrow\ & 5^x = \frac{750}{6} = 125 \\
\Leftrightarrow\ & 5^x = 5^3 \\
\Leftrightarrow\ & x = 3
\end{aligned}
$$

Vérification : $5^3 + 5^{3+1} = 125 + 625 = 750$

Exercice 2.4 *Résoudre l'équation :* $a^2+\frac{1}{a^2}+b^2+\frac{1}{b^2}=4$.

On remarque que : $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2-2+\frac{1}{a^2}$ et $\left(b-\frac{1}{b}\right)^2=b^2-2+\frac{1}{b^2}$.

L'équation initiale devient :

$$\left(a^2-2+\frac{1}{a^2}+2\right)+\left(b^2-2+\frac{1}{b^2}+2\right)=4$$

$$\Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2+\left(b-\frac{1}{b}\right)^2+2=4$$

$$\Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(b-\frac{1}{b}\right)^2=0$$

Or $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\geq 0$ et $\left(b-\frac{1}{b}\right)^2\geq 0$

Donc la relation $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(b-\frac{1}{b}\right)^2=0$ implique :

$$\begin{cases} a-\frac{1}{a}=0 \\ b-\frac{1}{b}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{a}-\frac{1}{a}=0 \\ \frac{b^2}{b}-\frac{1}{b}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2-1^2}{a}=0 \\ \frac{b^2-1^2}{b}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(a+1)(a-1)}{a}=0 \\ \frac{(b+1)(b-1)}{b}=0 \end{cases}$$

Ainsi les valeurs possibles de a sont 1 et -1, il en est de même pour b.

Les seules solutions de l'équation $a^2+\frac{1}{a^2}+b^2+\frac{1}{b^2}=4$ sont les couples $(a;b)$ appartenant à l'ensemble :

$$S=\{(1;1),(1;-1),(-1;1),(-1;-1)\}$$

Exercice 2.5 *Résoudre l'équation :* $\sqrt{x}+\sqrt{x^2}=\sqrt{x^3}+\sqrt{x^4}$.

La variable x doit être positive.

$$\sqrt{x}+\sqrt{x^2}=\sqrt{x^3}+\sqrt{x^4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+x=x\sqrt{x}+x^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+x-x\sqrt{x}-x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-x\sqrt{x}+x-x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(1-x)\sqrt{x}+x(1-x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+x\right)(1-x)=0$$

Soit $\sqrt{x}+x=0$: la seule solution est $x=0$

Soit $1-x=0$ soit : $x=1$. → les solutions sont : $S=\{0;1\}$

Exercice 2.6 *Simplifier l'expression :* $\sqrt{13-\sqrt{105}}$.

$$\sqrt{13-\sqrt{105}}=\sqrt{\frac{26-2\sqrt{21\times 5}}{2}}=\sqrt{\frac{21-2\sqrt{21\times 5}+5}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{21}\right)^2-2\sqrt{21\times 5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{21}-\sqrt{5}\right)^2}{2}}=\frac{\sqrt{21}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{42}-\sqrt{10}}{2}$$

Exercice 2.7

Simplifier l'expression : $\sqrt{9999^2+19999}$.

Calculons séparément le contenu de la racine carrée :

$$\begin{aligned}9999^2+19999 &= 9999^2+10\,000+9999\\ &= 9999(9999+1)+10\,000\\ &= 9999\times 10\,000+10\,000\\ &= 10\,000(9999+1)\\ &= 10\,000^2\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sqrt{9999^2+19999}=10\,000$$

Exercice 2.8

Simplifier l'expression : $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$.

On pose : $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}& x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \Leftrightarrow\ & 2x=1+\sqrt{3}\\ \Leftrightarrow\ & 2x-1=\sqrt{3}\\ \Leftrightarrow\ & (2x-1)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2\\ \Leftrightarrow\ & 4x^2-4x+1=3\\ \Leftrightarrow\ & 4x^2=4x+2\\ \Leftrightarrow\ & x^2=\frac{4x+2}{4}=x+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$x^{10}=\left(x^2\right)^5=\left(x+\frac{1}{2}\right)^5=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\times\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\times\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Or : $$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+x+\frac{1}{4}=x+\frac{1}{2}+x+\frac{1}{4}=2x+\frac{3}{4}$$

Donc : $$x^{10}=\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2\times\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Or : $$\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2=4x^2+3x+\frac{9}{16}=4\left(x+\frac{1}{2}\right)+3x+\frac{9}{16}=7x+\frac{41}{16}$$

Donc : $$x^{10}=\left(7x+\frac{41}{16}\right)\times\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ x^{10}=7x^2+\frac{7}{2}x+\frac{41}{16}x+\frac{41}{32}=7\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{56}{16}x+\frac{41}{16}x+\frac{41}{32}$$

$$\Leftrightarrow\ x^{10}=\frac{112}{16}x+\frac{112}{32}+\frac{56}{16}x+\frac{41}{16}x+\frac{41}{32}=\frac{209}{16}x+\frac{153}{32}$$

Or : $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$x^{10}=\frac{209}{16}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{153}{32}=\frac{209}{32}+\frac{209\sqrt{3}}{32}+\frac{153}{32}=\frac{362+209\sqrt{3}}{32}=\frac{81}{16}+\frac{209\sqrt{3}}{32}$$

Exercice 2.9

Résoudre l'équation : $a+b=\sqrt{21+ab}$, $a,b\in\mathbb{Z}$.

!!! Méthode à éviter !!! Erreur classique !!!

$$a+b=\sqrt{21+ab} \qquad \rightarrow a+b \text{ doit être positif}$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^2=\left(\sqrt{21+ab}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=21+ab$$
$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2-ab=21$$
$$\Leftrightarrow a^2+ab+b^2=21$$
$$\Leftrightarrow 4a^2+4ab+4b^2=84$$
$$\Leftrightarrow 4a^2+4ab+b^2+3b^2=84$$
$$\Leftrightarrow (2a+b)^2+3b^2=81+3$$
$$\Leftrightarrow (2a+b)^2-9^2+\left(\sqrt{3}b\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow (2a+b+9)(2a+b-9)+\left(\sqrt{3}b+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}b-\sqrt{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (2a+b+9)(2a+b-9)+3(b+1)(b-1)=0$$

Si : $b=1$ *:*

$$2a+b+9=0 \Leftrightarrow 2a=-9-b=-10 \Leftrightarrow a=-5 \qquad \rightarrow a+b<0$$
$$2a+b-9=0 \Leftrightarrow 2a=9-b=8 \Leftrightarrow a=4$$

Si : $b=-1$ *:*

$$2a+b+9=0 \Leftrightarrow 2a=-9-b=-8 \Leftrightarrow a=-4 \qquad \rightarrow a+b<0$$
$$2a+b-9=0 \Leftrightarrow 2a=9-b=10 \Leftrightarrow a=5$$

Ainsi :

$$(a,b)\in\{(4;1),(5;-1)\}$$

Cette méthode est incomplète, il manque notamment les solutions : $(5;-4)$ et $(-4;5)$.

Voici la méthode classique :

Si a et b sont des entiers, alors $x=a+b$ et $y=a-b$ sont des entiers.

Dans ce cas, $a=\dfrac{x+y}{2}$ et $b=\dfrac{x-y}{2}$. Ainsi :

$$a+b=\sqrt{21+ab}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=\sqrt{21+\frac{x+y}{2}\times\frac{x-y}{2}}$$
$$\Leftrightarrow x=\sqrt{21+\frac{x^2-y^2}{4}} \qquad \rightarrow x \text{ doit être positif.}$$
$$\Leftrightarrow x^2=21+\frac{x^2-y^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2=84+x^2-y^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+y^2=84$$

x étant un entier positif, testons les valeurs de x dans la relation précédente :

- Si $x=0$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times 0^2=84$: ce n'est pas un carré parfait.
- Si $x=1$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times 1^2=81$: deux solutions : $y=9$ et $y=-9$
- Si $x=2$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times 2^2=72$: ce n'est pas un carré parfait.
- Si $x=3$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times 3^2=57$: ce n'est pas un carré parfait.
- Si $x=4$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times 4^2=36$: deux solutions : $y=6$ et $y=-6$
- Si $x=5$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times 5^2=9$: deux solutions : $y=3$ et $y=-3$
- Si $x=6$: $\Leftrightarrow$ $y^2=84-3\times 6^2=-24$: pas de solution réelle.

Or : $a=\dfrac{x+y}{2}$ et $b=\dfrac{x-y}{2}$. Ainsi :

Si $x=1$ et $y=9$: $a=\dfrac{x+y}{2}=5$ et $b=\dfrac{x-y}{2}=-4$.

Si $x=1$ et $y=-9$: $a=\dfrac{x+y}{2}=-4$ et $b=\dfrac{x-y}{2}=5$.

Si $x=4$ et $y=6$: $a=\dfrac{x+y}{2}=5$ et $b=\dfrac{x-y}{2}=-1$.

Si $x=4$ et $y=-6$: $a=\dfrac{x+y}{2}=-1$ et $b=\dfrac{x-y}{2}=5$.

Si $x=5$ et $y=3$: $a=\dfrac{x+y}{2}=4$ et $b=\dfrac{x-y}{2}=1$.

Si $x=5$ et $y=-3$: $a=\dfrac{x+y}{2}=1$ et $b=\dfrac{x-y}{2}=4$.

Les solutions entières sont :

$$(a,b)\in\{(5;-4),(-4;5),(5;-1),(-1;5),(4;1),(1;4)\}$$

Exercice 2.10

Résoudre l'équation : $\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}}=2$.

$$\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}}=2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}}\right)^2=2^2$$

$$\Leftrightarrow p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}=4$$

$$\Leftrightarrow \left(p\sqrt{p\sqrt{p\sqrt{p}}}\right)^2=4^2$$

$$\Leftrightarrow p^2\times p\sqrt{p\sqrt{p}}=16$$

$$\Leftrightarrow \left(p^3\sqrt{p\sqrt{p}}\right)^2=16^2$$

$$\Leftrightarrow p^6\times p\sqrt{p}=256$$

$$\Leftrightarrow \left(p^7\sqrt{p}\right)^2=256^2$$

$$\Leftrightarrow p^{14}\times p=256^2$$

$$\Leftrightarrow \quad p^{15} = \left(2^8\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad p^{15} = 2^{16}$$

$$\Leftrightarrow \quad p = 2^{\frac{16}{15}}$$

Exercice 2.11 **Olympiades internationales de mathématiques**

Résoudre le système : $\begin{cases} a-b=11 \\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=11 \end{cases}$.

Classique : on pose : $x=\sqrt{a}$ et $y=\sqrt{b}$. On obtient :

$$\begin{cases} x^2-y^2=11 \\ x+y=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y)=11 \\ x+y=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11(x-y)=11 \\ x+y=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=12 \\ x+y=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=11-6=5 \end{cases}$$

Or : $x=\sqrt{a}$ et $y=\sqrt{b}$. Ainsi :

$$\sqrt{a}=6 \quad \Leftrightarrow \quad a=36$$

$$\sqrt{b}=5 \quad \Leftrightarrow \quad b=25$$

La solution est :

$$(a,b)=(36;25)$$

Exercice 2.12 **Olympiades de mathématiques**

Simplifier l'expression : $\frac{2019}{2020}+\sqrt{\frac{2019^2}{2020^2}+2019^2+1}$.

$$\sqrt{\frac{2019^2}{2020^2}+2019^2+1}=\sqrt{\frac{2019^2}{2020^2}+\frac{2019^2\times2020^2}{2020^2}+\frac{2020^2}{2020^2}}=\frac{1}{2020}\sqrt{2019^2+2019^2\times2020^2+2020^2}$$

On va d'abord simplifier :

$$\begin{aligned} 2019^2+2019^2\times2020^2+2020^2 &= 2019^2+(2020-1)^2\times2020^2+2020^2 \\ &= 2019^2+\left(2020^2-2020\right)^2+2020^2 \\ &= 2019^2+2020^4-2\times2020^3+2020^2+2020^2 \\ &= 2020^4-2\times2020^3+2\times2020^2+2019^2 \\ &= 2020^4-2\times\left(2020^3-2020^2\right)+2019^2 \\ &= 2020^4-2\times2020^2\times(2020-1)+2019^2 \end{aligned}$$

$$= 2020^4 - 2\times 2020^2 \times 2019 + 2019^2$$
$$= \left(2020^2 - 2019\right)^2$$

L'expression initiale devient :

$$\frac{2019}{2020} + \sqrt{\frac{2019^2}{2020^2} + 2019^2 + 1} = \frac{2019}{2020} + \frac{1}{2020}\sqrt{\left(2020^2 - 2019\right)^2}$$
$$= \frac{2019}{2020} + \frac{2020^2 - 2019}{2020}$$
$$= \frac{2020^2}{2020}$$
$$= 2020$$