Exercices divers sur les Olympiades de mathématiques

Exercice 3.1 : Résoudre : $m^9 + m^6 = 36$

Exercice 3.2 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $\begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 5 \\ \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} = 5 \end{cases}$

Exercice 3.3 : Simplifier : $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{9}{4}}$.

Exercice 3.4 : Résoudre : $x\sqrt{x} = x + \sqrt{x}$

Exercice 3.5 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $x + 2xy + y = 8$

Exercice 3.6 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $x^6 = (x-6)^6$

Exercice 3.7 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $\frac{5x}{x+1} = \frac{4x}{x+3} - \frac{24}{x^2+4x+3}$

Exercice 3.8 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $m^4 - 72m - 17 = 0$

Exercice 3.8 bis : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $m^2 + 8\sqrt{m} - 7 = 0$

Exercice 3.9 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $\begin{cases} m^2 - n^2 = 45 \\ mn = 30 \end{cases}$

Exercice 3.10 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $x^4 + x^3 = 108$

Exercice 3.11 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $\frac{x^7 + x^5 + x^3}{x^6 + x^5 + x^4} = 3$

Exercice 3.1 : *Résoudre* : $m^9+m^6=36$

On pose : $x=m^3$. On obtient :

$$\begin{aligned}
& x^3+x^2-36=0 \\
\Leftrightarrow\ & x^3+x^2-27-9=0 \\
\Leftrightarrow\ & x^3-3^3+x^2-3^2=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-3)\left(x^2+3x+3^2\right)+(x-3)(x+3)=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-3)\left(x^2+3x+3^2+x+3\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-3)\left(x^2+4x+12\right)=0
\end{aligned}$$

Soit : $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

Soit : $x^2+4x+12=0$ → $\Delta=4^2-4\times1\times12=-32$: il n'y a pas de solution réelle.

Ainsi :

$$S=\{3\}$$

Exercice 3.2 : *Résoudre* : $\begin{cases}\sqrt{a}-\sqrt{b}=5\\ \sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}=5\end{cases}$

On pose : $x=\sqrt[4]{a}$ et $y=\sqrt[4]{b}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=5\\ x+y=5\end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}x^2-y^2=5\\ x+y=5\end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}(x+y)(x-y)=5\\ x+y=5\end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}5(x-y)=5\\ x+y=5\end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}x-y=\dfrac{5}{5}=1\\ x+y=5\end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}2x=6\\ x+y=5\end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}x=3\\ y=5-3=2\end{cases}
\end{aligned}$$

Or : $x=\sqrt[4]{a}$ et $y=\sqrt[4]{b}$. On obtient :

$$\begin{cases}a^{\frac{1}{4}}=3\\ b^{\frac{1}{4}}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3^4=81\\ b=2^4=16\end{cases}$$

Exercice 3.3 : *Simplifier :* $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{9}{4}}$.

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{9}{4}}=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{\frac{9}{4}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{9}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{8}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{3}{2}\right)^4=\sqrt{\frac{3}{2}}\times\frac{81}{16}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}\times\frac{81}{16}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{81}{16}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{81}{32}\times\sqrt{6}$$

Exercice 3.4 : *Résoudre :* $x\sqrt{x}=x+\sqrt{x}$

On pose $y=\sqrt{x}$. Ainsi :

$$y^2\times y=y^2+y$$
$$\Leftrightarrow\ y^2\times y-y^2-y=0$$
$$\Leftrightarrow\ y\left(y^2-y-1\right)=0$$

Soit : $y=0$

Soit : $y^2-y-1=0\ \rightarrow\ \Delta=(-1)^2-4\times1\times(-1)=1+4=5$ donc deux solutions :

$$y_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ \text{ et }\ y_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Or : $y=\sqrt{x}\ \Leftrightarrow\ x=y^2$

Si $y=0$: $x=0$

Si $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$: il n'y a pas de solution

Si $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$: $x=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Solutions :

$$S=\left\{0;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Exercice 3.5 : *trouver les solutions entières de l'équation :* $x+2xy+y=8$

$$x+2xy+y=8$$
$$\Leftrightarrow\ x(1+2y)+y=8$$
$$\Leftrightarrow\ 2x(1+2y)+2y=16$$
$$\Leftrightarrow\ 2x(1+2y)+2y+1=16+1$$
$$\Leftrightarrow\ (2x+1)(1+2y)=17$$

Quatre possibilités :

$(2x+1)=1$ et $(1+2y)=17\ \Leftrightarrow\ (x,y)=(0;8)$

$(2x+1)=17$ et $(1+2y)=1\ \Leftrightarrow\ (x,y)=(8;0)$

$(2x+1)=-1$ et $(1+2y)=-17\ \Leftrightarrow\ (x,y)=(-1;-9)$

$(2x+1)=-17$ et $(1+2y)=-1\ \Leftrightarrow\ (x,y)=(-9;-1)$

Exercice 3.6 : *Résoudre* : $x^6=(x-6)^6$

$$x^6=(x-6)^6$$
$$\Leftrightarrow\ (x^3)^2-\left[(x-6)^3\right]^2=0$$
$$\Leftrightarrow\ \left[x^3+(x-6)^3\right]\left[x^3-(x-6)^3\right]=0$$

Or : $$x^3+(x-6)^3=(x+(x-6))\left[x^2-x(x-6)+(x-6)^2\right]$$
$$=(2x-6)\left[x^2-x^2+6x+x^2-12x+36\right]$$
$$=(2x-6)(x^2-6x+36)$$

Or : $$x^3-(x-6)^3=(x-(x-6))\left[x^2+x(x-6)+(x-6)^2\right]$$
$$=6\left[x^2+x^2-6x+x^2-12x+36\right]$$
$$=6(3x^2-18x+36)$$

Ainsi : $$x^6=(x-6)^6$$
$$\Leftrightarrow\ (2x-6)(x^2-6x+36)\times 6(3x^2-18x+36)=0$$

Soit : $2x-6=0 \ \Leftrightarrow\ x=3$

Soit : $x^2-6x+36=0 \ \rightarrow\ \Delta=(-6)^2-4\times1\times36=36-144=-108$: il n'y a pas de solution réelle

Soit : $3x^2-18x+36=0 \ \rightarrow\ \Delta=(-18)^2-4\times3\times36=324-432=-108$: il n'y a pas de solution réelle

Ainsi :
$$S=\{3\}$$

Exercice 3.7 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $\dfrac{5x}{x+1}=\dfrac{4x}{x+3}-\dfrac{24}{x^2+4x+3}$

On remarque que : $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$.

Les valeurs interdites sont -1 et -3.

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}/\{-3;-1\}$:

$$\frac{5x}{x+1}=\frac{4x}{x+3}-\frac{24}{x^2+4x+3}$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{5x(x+3)}{(x+1)(x+3)}=\frac{4x(x+1)}{(x+3)(x+1)}-\frac{24}{x^2+4x+3}$$
$$\Leftrightarrow\ 5x(x+3)=4x(x+1)-24$$
$$\Leftrightarrow\ 5x^2+15x-4x^2-4x+24=0$$
$$\Leftrightarrow\ x^2+11x+24=0$$

Discriminant :

$\Delta=11^2-4\times1\times24=121-96=25$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-11-5}{2}=-8 \text{ et } x_2=\frac{-11+5}{2}=-3$$

Exercice 3.8 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $m^4 - 72m - 17 = 0$

$$m^4 = 72m + 17$$

$$\Leftrightarrow \quad m^4 + am^2 + b = 72m + 17 + am^2 + b \quad , \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad m^4 + am^2 + b = a\left(m^2 + \frac{72}{a}m + \frac{17+b}{a}\right)$$

Pour avoir une identité remarquable dans le membre de gauche, on doit avoir :

$$2 \times m^2 \times \sqrt{b} = am^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{b} = \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad b = \frac{a^2}{4}$$

Pour avoir une identité remarquable dans le membre de droite, on doit avoir :

$$2 \times m \times \sqrt{\frac{17+b}{a}} = \frac{72}{a}m$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{17+b}{a}} = \frac{72}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{17+b}{a} = \frac{36^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad a(17+b) = 36^2$$

Or : $b = \dfrac{a^2}{4}$, donc :

$$a\left(17 + \frac{a^2}{4}\right) = 36^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a\left(68 + a^2\right) = 4 \times 36^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^3 + 68a - 5184 = 0$$

Après bien des efforts :

$$\Leftrightarrow \quad a^3 - 16^3 + 68a - 1088 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-16)\left(a^2 + 16a + 16^2\right) + 68(a-16) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-16)\left(a^2 + 16a + 16^2 + 68\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-16)\left(a^2 + 16a + 424\right) = 0$$

Soit : $a - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 16$

Soit : $a^2 + 16a + 424 = 0$ → $\Delta = 16^2 - 4 \times 1 \times 424 = -1440 < 0$: pas de solution réelle

Si $a = 16$, on en déduit :

$$b = \frac{a^2}{4} = \frac{16^2}{2^2} = 64$$

L'équation initiale devient :

$$m^4 + 16m^2 + 64 = 16\left(m^2 + \frac{72}{16}m + \frac{17+64}{16}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(m^2 + 8\right)^2 = 16m^2 + 72m + 81$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(m^2 + 8\right)^2 = (4m)^2 + 2 \times 4m \times 9 + 9^2$$

$$\Leftrightarrow \left(m^2+8\right)^2=\left(4m+9\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(m^2+8\right)^2-\left(4m+9\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(m^2+8+4m+9\right)\left(m^2+8-4m-9\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(m^2+4m+17\right)\left(m^2-4m-1\right)=0$$

Soit : $m^2+4m+17=0$ → $\Delta=4^2-4\times1\times17=16-68=-52<0$: pas de solution réelle

Soit : $m^2-4m-1=0$ → $\Delta=\left(-4\right)^2-4\times1\times\left(-1\right)=16+4=20$ donc 2 solutions

$$m_1=\frac{4-\sqrt{20}}{2}=2-\sqrt{5} \quad \text{et} \quad m_2=\frac{4+\sqrt{20}}{2}=2+\sqrt{5}$$

Les solutions sont :

$$S=\left\{2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\right\}$$

Exercice 3.8 bis : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $m^2+8\sqrt{m}-7=0$

On pose : $x=\sqrt{m}$. On obtient :

$$x^4+8x-7=0$$

$$\Leftrightarrow x^4=-8x+7$$

$$\Leftrightarrow x^4+ax^2+b=-8x+7+ax^2+b \quad , \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow x^4+ax^2+b=ax^2-8x+7+b$$

$$\Leftrightarrow x^4+ax^2+b=a\left(x^2-\frac{8}{a}x+\frac{7+b}{a}\right)$$

Pour avoir une identité remarquable dans le membre de gauche, on doit avoir :

$$2\times x^2\times\sqrt{b}=ax^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{b}=\frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow b=\frac{a^2}{4}$$

Pour avoir une identité remarquable dans le membre de droite, on doit avoir :

$$2\times x\times\sqrt{\frac{7+b}{a}}=\frac{8}{a}x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{7+b}{a}}=\frac{8}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7+b}{a}=\frac{16}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow 7+b=\frac{16}{a}$$

$$\Leftrightarrow a\left(7+b\right)=16$$

Or : $b=\frac{a^2}{4}$, donc :

$$a\left(7+\frac{a^2}{4}\right)=16$$

$\Leftrightarrow \quad a\left(28+a^2\right)=64$

$\Leftrightarrow \quad a^3+28a-64=0$

$\Leftrightarrow \quad a^3-2^3+28(a-2)=0$

$\Leftrightarrow \quad (a-2)\left(a^2+2a+4\right)+28(a-2)=0$

$\Leftrightarrow \quad (a-2)\left(a^2+2a+32\right)=0$

Soit : $a-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=2$

Soit : $a^2+2a+32=0 \quad \rightarrow \Delta=2^2-4\times1\times32=4-128=-124$ donc pas de solution réelle.

On en déduit :

$$b=\frac{a^2}{4}=1.$$

L’équation initiale devient :

$$x^4+2x^2+1=2\left(x^2-\frac{8}{2}x+\frac{7+1}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow \quad \left(x^2+1\right)^2=2\left(x^2-4x+4\right)$

$\Leftrightarrow \quad \left(x^2+1\right)^2=2(x-2)^2$

$\Leftrightarrow \quad \left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}(x-2)\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \quad \left(x^2+1+\sqrt{2}x-2\sqrt{2}\right)\left(x^2+1-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}\right)=0$

Soit : $x^2+\sqrt{2}x+1-2\sqrt{2}=0 \quad \rightarrow \Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times\left(1-2\sqrt{2}\right)=2-4+8\sqrt{2}=8\sqrt{2}-2>0$ donc 2 solutions

$$x_1=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{8\sqrt{2}-2}}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-2}}{2}$$

Soit : $x^2-\sqrt{2}x+1+2\sqrt{2}=0 \quad \rightarrow \Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times\left(1+2\sqrt{2}\right)=2-4-8\sqrt{2}=-8\sqrt{2}-2<0$

$\rightarrow$il n’y a pas de solution réelle

Les solutions sont :

$$S=\left\{\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{8\sqrt{2}-2}}{2};\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-2}}{2}\right\}$$

Exercice 3.9 : **Olympiades de mathématiques**

Résoudre : $\begin{cases} m^2-n^2=45 \\ mn=30 \end{cases}$

$$\begin{cases} m^2-n^2=45 \\ mn=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(m^2-n^2\right)=90 \\ 3mn=90 \end{cases} \Leftrightarrow 2m^2-3mn-2n^2=0$$

$\Leftrightarrow \quad 2m^2-4mn+mn-2n^2=0$

$\Leftrightarrow \quad 2m(m-2n)+n(m-2n)=0$

$\Leftrightarrow \quad (2m+n)(m-2n)=0$

Soit : $2m+n \quad \Leftrightarrow \quad n=-2m$

or : $mn=30$, donc : $mn=-2m^2=30 \quad \Leftrightarrow \quad m^2=-15$: pas de solution réelle

Soit : $m-2n \quad \Leftrightarrow \quad m=2n$

or : $mn = 30$, donc : $mn = 2n^2 = 30 \iff n^2 = 15$

soit : $n = \pm\sqrt{15}$ et $m = \dfrac{30}{n} = \dfrac{30}{\pm\sqrt{15}} = \dfrac{\pm 30\sqrt{15}}{15} = \pm 2\sqrt{15}$

Exercice 3.10 : Olympiades de mathématiques

Résoudre : $x^4 + x^3 = 108$

$$\begin{aligned}
& x^4 + x^3 = 108 \\
\iff\ & x^4 + x^3 - 81 - 27 = 0 \\
\iff\ & \left(x^2\right)^2 - \left(3^2\right)^2 + x^3 - 3^3 = 0 \\
\iff\ & \left(x^2 + 3^2\right)\left(x^2 - 3^2\right) + (x-3)\left(x^2 + 3x + 9\right) = 0 \\
\iff\ & \left(x^2 + 3^2\right)(x+3)(x-3) + (x-3)\left(x^2 + 3x + 9\right) = 0 \\
\iff\ & (x-3)\left[\left(x^2 + 3^2\right)(x+3) + \left(x^2 + 3x + 9\right)\right] = 0 \\
\iff\ & (x-3)\left[x^3 + 3x^2 + 9x + 27 + x^2 + 3x + 9\right] = 0 \\
\iff\ & (x-3)\left(x^3 + 4x^2 + 12x + 36\right) = 0
\end{aligned}$$

Soit : $x - 3 = 0 \iff x = 3$

Soit : $x^3 + 4x^2 + 12x + 36 = 0 \iff x \simeq -3{,}51$

Exercice 3.11 : Olympiades de mathématiques

Résoudre : $\dfrac{x^7 + x^5 + x^3}{x^6 + x^5 + x^4} = 3$

$$\begin{aligned}
& \frac{x^7 + x^5 + x^3}{x^6 + x^5 + x^4} = 3 \\
\iff\ & \frac{x^3\left(x^4 + x^2 + 1\right)}{x^3\left(x^3 + x^2 + x\right)} = 3 \\
\iff\ & \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x} = 3 \\
\iff\ & \frac{x^2\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)} = 3 \\
\iff\ & \frac{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}}{x + 1 + \frac{1}{x}} = 3
\end{aligned}$$

Or : $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$. Ainsi :

$$\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1}{x + \frac{1}{x} + 1} = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1^2}{x+\frac{1}{x}+1}=3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)}{x+\frac{1}{x}+1}=3$$

$$\Leftrightarrow \quad x+\frac{1}{x}-1=3$$

$$\Leftrightarrow \quad x+\frac{1}{x}-4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-4x+1=0$$

Discriminant :

$\Delta=(-4)^2-4\times1\times1^2=16-4=12$ donc deux solutions :

$x_1=\frac{4-\sqrt{12}}{2}=2-\sqrt{3}$ et $x_2=\frac{4+\sqrt{12}}{2}=2+\sqrt{3}$

Ainsi :

$$S=\left\{2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right\}$$