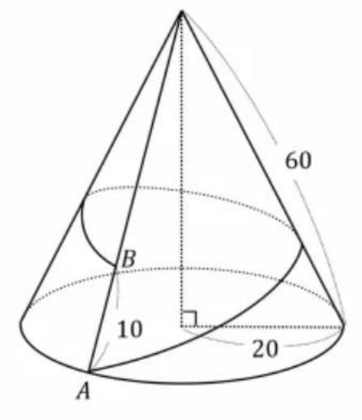
Problèmes de géométrie de haut niveau

Exercice 1 :

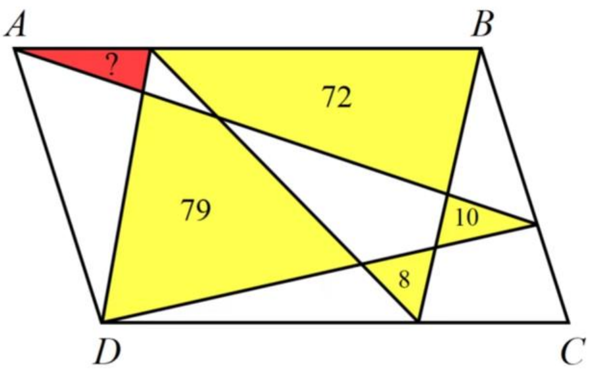
Le diagramme illustre un cône droit à base circulaire (données en cm).
Si vous prenez le plus court chemin pour aller de A vers B, le trajet va d'abord monter, puis redescendre.
Lorsque l'on commence à redescendre, quelle distance reste-t-il à parcourir ?

1) $\dfrac{200}{\sqrt{19}}$ 2) $\dfrac{300}{\sqrt{30}}$ 3) $\dfrac{300}{\sqrt{91}}$ 4) $\dfrac{400}{\sqrt{91}}$



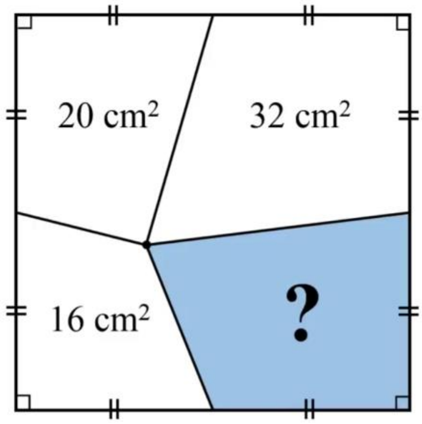
Exercice 2 :

ABCD est un parallélogramme.
Sur la figure, les aires des régions coloriées en jaune mesurent 8, 10, 72 et 72 cm^2.
Trouver l'aire du triangle rouge.
Ce schéma n'est pas à l'échelle.



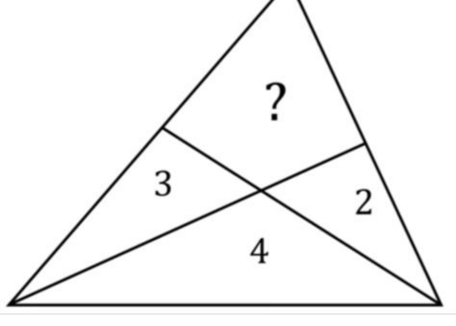
Exercice 3 :

Calculer l'aire du polygone bleu :



Exercice 4 :

Calculer l'aire du quadrilatère dans ce triangle.



Exercice 5 : **Enigme sur les exponentielles :**

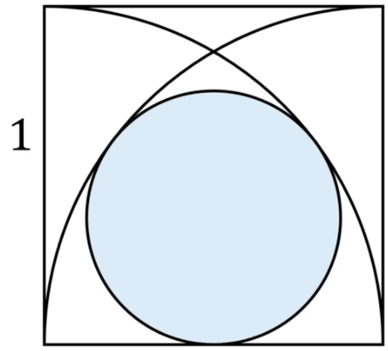
Trouver l'aire du cercle de centre l'origine $(0;0)$ et inscrit entre les deux courbes d'équations :

$$y = e^{-x^2}$$

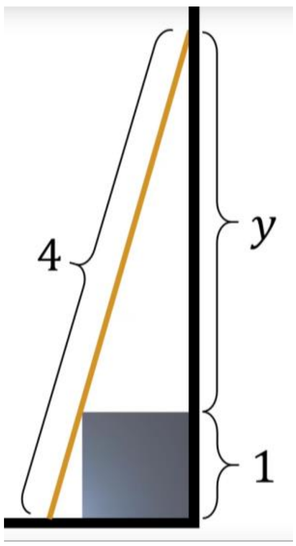
et $$y = -e^{-x^2}$$

Exercice 6 :

Trouver le rayon de ce cercle



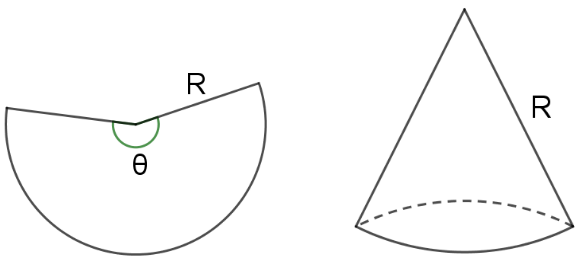
Exercice 7 :



Une échelle mesurant 4 mètres est posée contre un mur.
Elle est également appuyée sur une caisse cubique mesurant 1 mètre de côté.
Calculer y

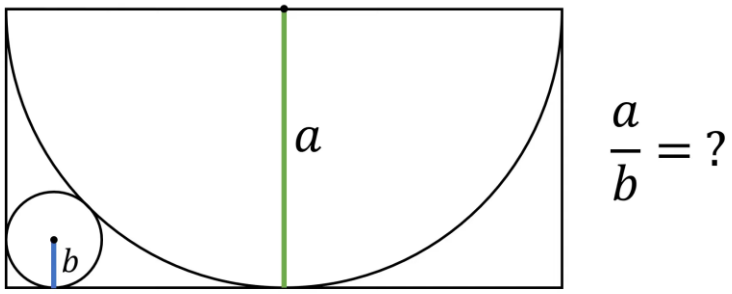
Exercice 8 :

On considère le patron d'un cône de révolution.



Si l'on considère que la valeur de la génératrice R reste constante, pour quelle valeur de l'angle θ le volume du cône devient-il maximal ?

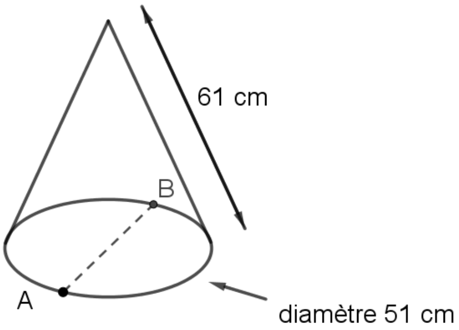
Exercice 9 :



Calculer le rapport $\frac{a}{b}$.

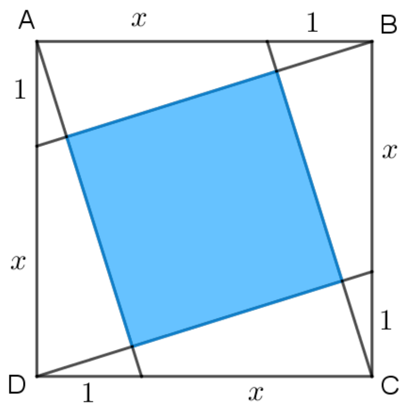
Exercice 10 : Problème de la mouche autour du cône

Une mouche est posée au point A extérieur de la base d'un cône placé sur une route pour signaler des travaux.
Les dimensions du cône sont disponibles sur le dessin.
La mouche désire se rendre au point diamétralement opposé de la base du cône.
Quelle est la distance minimum que la mouche devra effectuer pour son parcours ? (elle ne peut évidemment pas passer à travers le cône).
La distance sera donnée en cm arrondie au cm le plus proche.



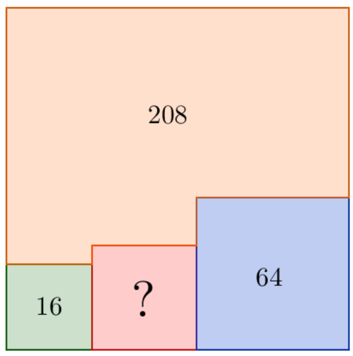
Exercice 11 :

Quelle proportion du carré ABCD est représentée en bleu ?
Combien vaut cette proportion si $x = 2$?

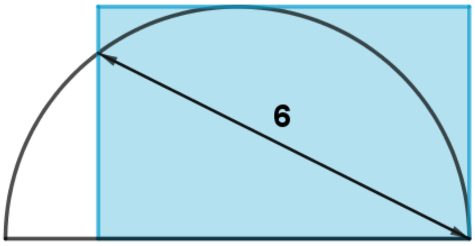


Exercice 12 :

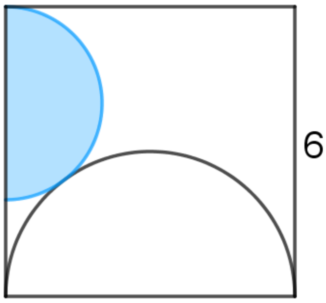
Quelle est l'aire du petit carré contenu dans le grand carré ?



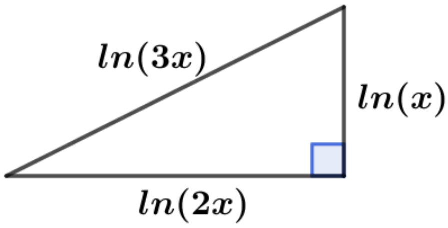
Exercice 13 :
Déterminer l'aire du rectangle bleu ci-contre.



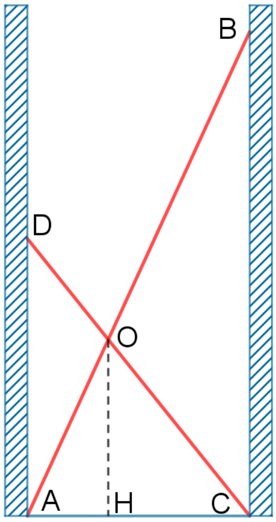
Exercice 14 :
Déterminer l'aire du demi-disque bleu ci-contre.



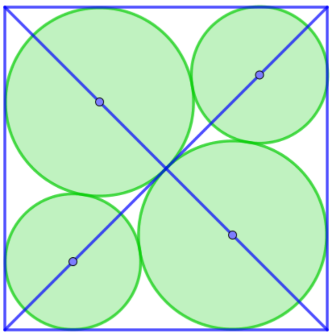
Exercice 15 :
Déterminer la valeur de x dans ce triangle logarithmique



Exercice 16 :
Deux planches : une grande (AB de trois mètres) et une petite (CD de deux mètres) sont appuyées sur deux murs.
Elles se croisent à un mètre du sol qui est horizontal.
Quelle distance sépare les deux murs ?

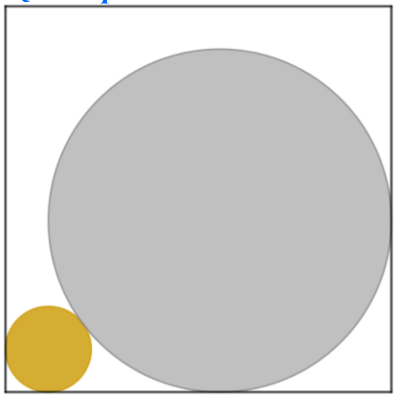


Exercice 17 :
Dans un carré de côté 1, on construit quatre cercles comme l'indique la figure ci-contre.
Calculer les rayons de ces cercles.



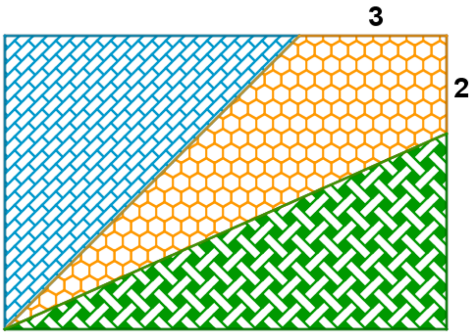
Exercice 18 :

Dans une boîte carrée de 27 cm de côté, se trouvent une boule de pétanque et un cochonnet.
Le rayon de la boule vaut quatre fois celui du cochonnet.
Quels sont leurs rayons ?



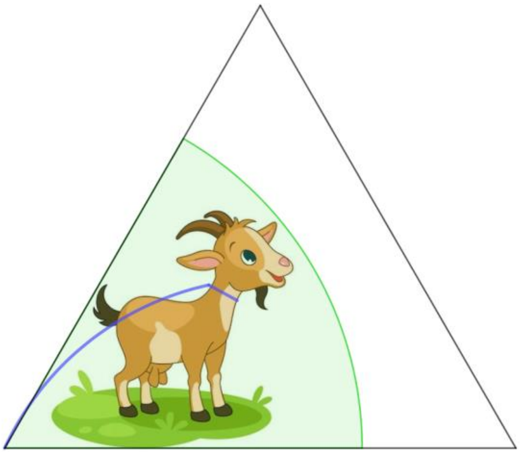
Exercice 19 :

Quelles sont les dimensions du rectangle ci-dessus sachant qu'il a été découpé en trois morceaux de même aire ?



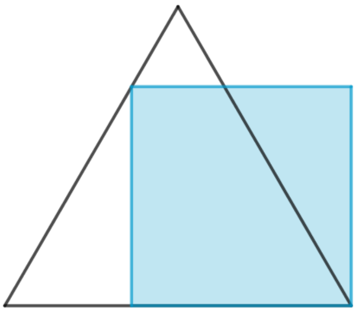
Exercice 20 :

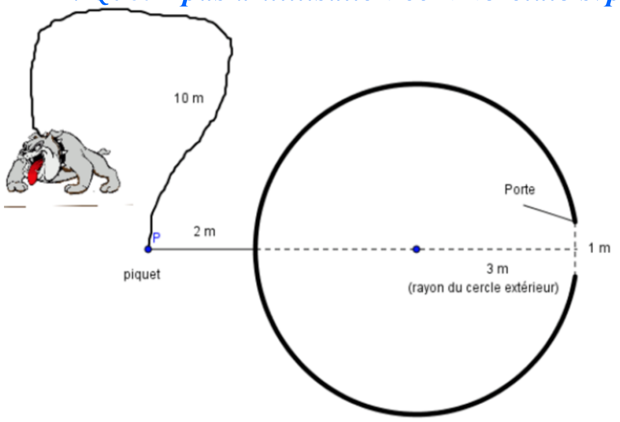
Soit un champ possédant 3 côtés de 100m de long formant un triangle équilatéral.
Soit une chèvre (outil idéal de remplacement de la tondeuse) attachée à un des sommets par une corde.
Quelle doit être la longueur de la corde pour qu'elle puisse brouter exactement la moitié de la surface du pré.



Exercice 21 :

La figure représente un triangle équilatéral et un carré dont trois sommets sont sur le triangle.
Si le périmètre du carré vaut 4, combien vaut le périmètre du triangle ?



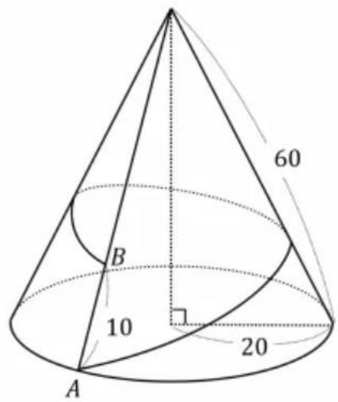


Exercice 22 : (*Auteur : Lionel DARIE : lycee-oiselet.fr*)
Le gardien d'un phare s'est absenté en laissant la porte ouverte. Mais il ne craint pas les intrus : son chien de garde, féroce, veille au grain.
Il est attaché par une chaine de 10 m à un piquet planté à 2 m du phare, diamétralement opposé à la porte. Celle-ci a une largeur de 1 m.
Le rayon du phare (cercle extérieur) est de 3 m.
La figure ci-contre résume la situation.
Malgré la présence du chien, quelqu'un peut-il tout de même s'introduire dans le phare ?

Exercice 1 : **(Remerciements à Jean Groeninger)**

Le diagramme illustre un cône droit à base circulaire.
Si vous prenez le plus court chemin pour aller de A vers B, le trajet va d'abord monter, puis redescendre.
Lorsque l'on commence à redescendre, quelle distance reste-t-il à parcourir ?

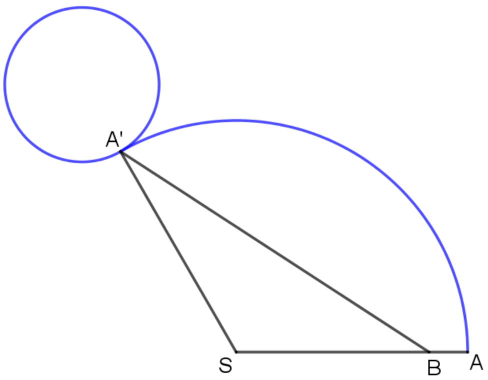
1) $\dfrac{200}{\sqrt{19}}$ 2) $\dfrac{300}{\sqrt{30}}$ 3) $\dfrac{300}{\sqrt{91}}$ 4) $\dfrac{400}{\sqrt{91}}$



La première chose à réaliser est de trouver les dimensions du patron de ce cône :

- Le rayon de la base mesure 20 cm.
- Le rayon de la portion de disque constituant la partie haute du cône mesure 60 cm.

Pour trouver l'angle de la portion de disque permettant de réaliser la partie haute du cône, on utilise l'égalité de longueur entre le périmètre de la base et l'arc de cercle indiqué ci-dessous AA' :



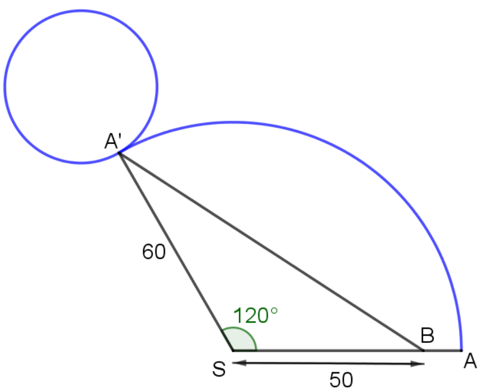
Le périmètre de la base vaut : $2\pi\times r = 2\pi\times 20 = 40\pi$ cm.
Le périmètre du grand disque dans lequel a été découpée la portion de disque mesure :
$2\pi\times R = 2\pi\times 60 = 120\pi$ cm.
L'angle $\alpha = \widehat{ASA'}$ d'obtient avec un rapport de proportionnalité avec le périmètre complet du grand cercle :

$360°$	$\alpha°$
120π	40π

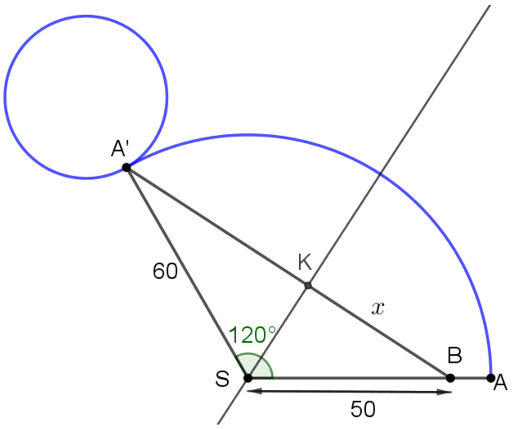
Ainsi :

$$120\pi\times\alpha = 360\times 40\pi \iff \alpha = \frac{360\times 40\pi}{120\pi} = 120°.$$

Soit :



Pour aller de A vers B, c'est-à-dire de A' vers B, on se rapproche du sommet puis on redescend, l'objectif du problème est de définir la distance KB , K étant le plus proche point de la droite $(A'B)$ avec S, K étant le projeté orthogonal de S sur la droite $(A'B)$:



On pose $x = \mathrm{KB}$:

Règle de trigonométrie dans le triangle rectangle BSK :

$$\cos\left(\widehat{\mathrm{KBS}}\right) = \frac{x}{50} \Leftrightarrow x = 50\cos\left(\widehat{\mathrm{KBS}}\right)$$

On peut calculer la distance complète à parcourir avec la formule d'Al Kashi dans le triangle A'BS :

$$\mathrm{A'B}^2 = \mathrm{BS}^2 + \mathrm{A'S}^2 - 2\times\mathrm{BS}\times\mathrm{A'B}\times\cos\left(\widehat{\mathrm{A'SB}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A'B}^2 = 50^2 + 60^2 - 2\times 50\times 60\times\cos(120)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A'B}^2 = 2500 + 3600 - 6000\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A'B}^2 = 9100$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A'B} = \sqrt{9100} = 10\sqrt{91}$$

Toujours d'après la formule d'Al Kashi dans le triangle A'BS :

$$\mathrm{A'S}^2 = \mathrm{BS}^2 + \mathrm{A'B}^2 - 2\times\mathrm{BS}\times\mathrm{A'B}\times\cos\left(\widehat{\mathrm{A'BS}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 60^2 = 50^2 + \left(10\sqrt{91}\right)^2 - 2\times 50\times 10\sqrt{91}\times\cos\left(\widehat{\mathrm{A'BS}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3600 - 2500 - 9100 = -1000\sqrt{91}\times\cos\left(\widehat{\mathrm{A'BS}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8000}{-1000\sqrt{91}} = \cos\left(\widehat{\mathrm{A'BS}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\mathrm{A'BS}}\right) = \frac{8}{\sqrt{91}}$$

Ainsi :

$$x = 50\cos\left(\widehat{\mathrm{KSB}}\right) = 50\times\frac{8}{\sqrt{91}} = \frac{400}{\sqrt{91}}.$$

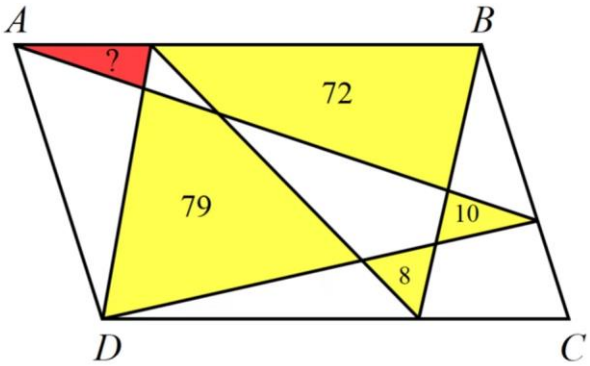
Exercice 2 :

ABCD est un parallélogramme.

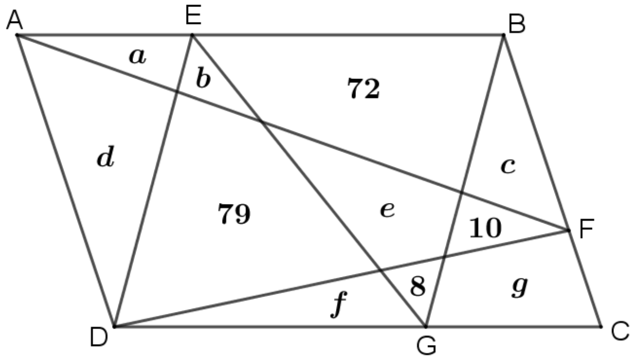
Sur la figure, les aires des régions coloriées en jaune mesurent 8, 10, 72 et 72 cm^2.

Trouver l'aire du triangle rouge.

Ce schéma n'est pas à l'échelle.



Plusieurs méthodes, dont la suivante, sans se soucier de l'éventuel parallélisme des droites (DE) et (BG) :



L'aire du triangle ADF est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme ABCD :

$$a+b+72+c+f+8+g=d+79+e+10$$

$$\Leftrightarrow \quad a+b+c+f+g=d+e+9$$

L'aire des triangles DEG et BCG est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme ABCD :

$$b+79+f+c+10+g=a+d+72+8+e$$

$$\Leftrightarrow \quad b+f+c+g+9=a+d+e$$

On obtient le système :

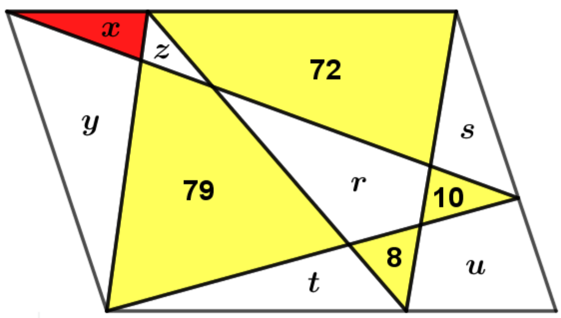
$$\begin{cases} a+b+c+f+g=d+e+9 \\ b+f+c+g+9=a+d+e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+f+g-9=d+e \\ b+f+c+g+9=a+a+b+c+f+g-9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+f+g-9=d+e \\ 9=2a-9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+f+g-9=d+e \\ 18=2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad a=9$$

AUTRE REDACTION :



Le parallélisme n'est pas certain, donc :

- L'aire du triangle $(y+79+r+10)$ représente la moitié de l'aire du parallélogramme
- L'aire des deux triangles $(x+y)+(72+r+8)$ représente la moitié de l'aire du parallélogramme

Par identification, on obtient :

$$y+79+r+10=x+y+72+r+8$$

$$\Leftrightarrow \quad 79+10=x+72+8$$

$$\Leftrightarrow \quad 79+10-72-8=x$$

$$\Leftrightarrow \quad x=9$$

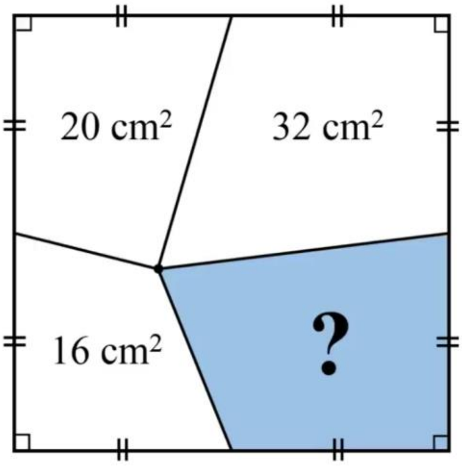
On aurait aussi pu utiliser de même :

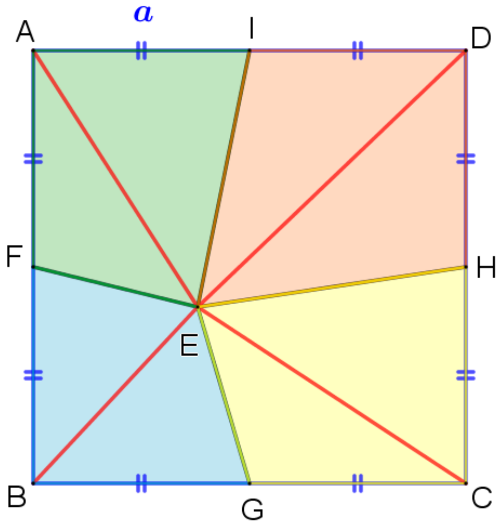
- l'aire des deux triangles $(s+10+u)+(z+79+t)$
- l'aire des deux triangles $(x+z+72+s)+(t+8+u)$

Ainsi :

$$s+10+u+z+79+t=x+z+72+s+t+8+u$$
$$\Leftrightarrow 10+79=x+72+8$$
$$\Leftrightarrow 79+10-72-8=x$$
$$\Leftrightarrow x=9$$

Exercice 3 :





On obtient 4 paires de triangles ayant la même aire :

$$\mathcal{A}_{\text{BEG}}=\mathcal{A}_{\text{CEG}}$$
$$\mathcal{A}_{\text{AEF}}=\mathcal{A}_{\text{BEF}}$$
$$\mathcal{A}_{\text{AEI}}=\mathcal{A}_{\text{DEI}}$$
$$\mathcal{A}_{\text{DEH}}=\mathcal{A}_{\text{CEH}}$$

Ainsi on peut exprimer l'aire cherchée :

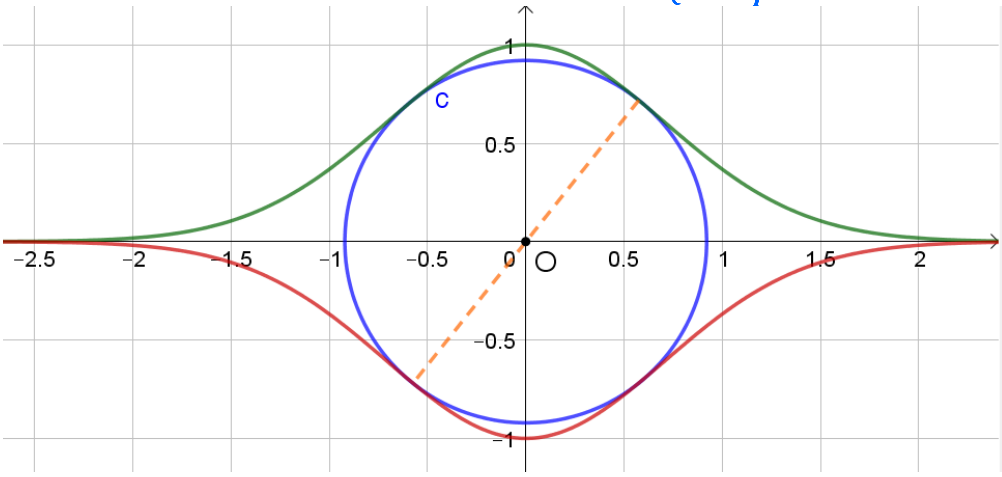
$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{CEG}}+\mathcal{A}_{\text{CEH}}&=\mathcal{A}_{\text{BEG}}+\mathcal{A}_{\text{DEH}}\\&=\left(16-\mathcal{A}_{\text{BEF}}\right)+\left(32-\mathcal{A}_{\text{DEI}}\right)\\&=48-\mathcal{A}_{\text{BEF}}-\mathcal{A}_{\text{DEI}}\\&=48-\mathcal{A}_{\text{AEF}}-\mathcal{A}_{\text{AEI}}\\&=48-20\\&=28\,\text{cm}^2\end{aligned}$$

Exercice 5 : **Enigme sur les exponentielles :**

Trouver l'aire du cercle de centre l'origine $(0;0)$ et inscrit entre les deux courbes d'équations :

$$y=e^{-x^2} \quad \text{et} \quad y=-e^{-x^2}.$$

La problématique est la suivante : il faut trouver l'aire du disque ci-dessous :



L'équation du cercle est :

$$x^2+y^2=r^2 \quad\Leftrightarrow\quad y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

Ce cercle vérifie deux contraintes :

- Si $y\geq 0$: le demi-cercle d'équation $y=\sqrt{r^2-x^2}$ est au-dessous de la courbe d'équation : $y=e^{-x^2}$, ainsi :

$$e^{-x^2}-\sqrt{r^2-x^2}\geq 0$$

- Si $y<0$: le demi-cercle d'équation $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ est au-dessus de la courbe d'équation : $y=-e^{-x^2}$, ainsi :

$$-\sqrt{r^2-x^2}-\left(-e^{-x^2}\right)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -\sqrt{r^2-x^2}+e^{-x^2}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-x^2}-\sqrt{r^2-x^2}\geq 0$$

On peut également considérer que l'on recherche la plus petite distance entre deux points de chacune des courbes symétriques par rapport à l'origine (car tous les autres cercles coupent les courbes) :

→entre un point de coordonnées $\left(x;e^{-x^2}\right)$ et un autre de coordonnées $\left(-x;-e^{-x^2}\right)$

→le carré de la distance entre ces deux points est :

$$\left(x-(-x)\right)^2+\left(e^{-x^2}-\left(-e^{-x^2}\right)\right)^2=(2x)^2+\left(2e^{-x^2}\right)^2=4\left(x^2+e^{-2x^2}\right)$$

Nous recherchons la plus grande distance possible, la dérivée de cette expression est :

$$4\left(2x-4xe^{-2x^2}\right)=8x\left(1-2e^{-2x^2}\right).$$

Pour simplifier l'étude, cherchons une solution telle que $x>0$: la parenthèse s'étudie comme suit :

$$\begin{aligned}
1-2e^{-2x^2}>0 &\Leftrightarrow -2e^{-2x^2}>-1\\
&\Leftrightarrow e^{-2x^2}<\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \ln\left(e^{-2x^2}\right)<\ln\left(\frac{1}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow -2x^2<-\ln 2\\
&\Leftrightarrow x^2>\frac{1}{2}\ln 2\\
&\Leftrightarrow x^2>\ln\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Le carré de la distance entre ces deux points est donné par l'expression $4\left(x^2+e^{-2x^2}\right)$, donc l'expression de la distance est :

$$f(x)=\sqrt{4\left(x^2+e^{-2x^2}\right)}=2\sqrt{x^2+e^{-2x^2}}$$

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$, on obtient le tableau de variation de la fonction f :

x	0		$\sqrt{\ln\sqrt{2}}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	$f\left(\sqrt{\ln\sqrt{2}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\sqrt{\ln\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{\left(\sqrt{\ln\sqrt{2}}\right)^2+e^{-2\left(\sqrt{\ln\sqrt{2}}\right)^2}}=2\sqrt{\ln\sqrt{2}+e^{-2\ln\sqrt{2}}}=2\sqrt{\ln\sqrt{2}+e^{-\ln\left(\sqrt{2}\right)^2}}=2\sqrt{\ln\sqrt{2}+e^{-\ln 2}}$$

$$=2\sqrt{\ln\sqrt{2}+e^{\ln\frac{1}{2}}}=2\sqrt{\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}}$$

Cette distance minimale correspond au diamètre du disque cherché, donc son rayon mesure :

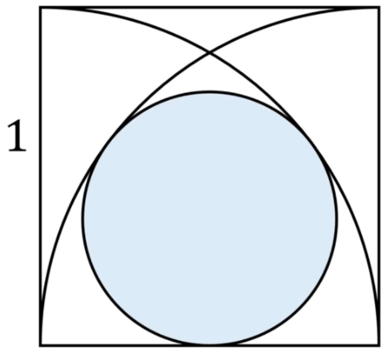
$$\sqrt{\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}}$$

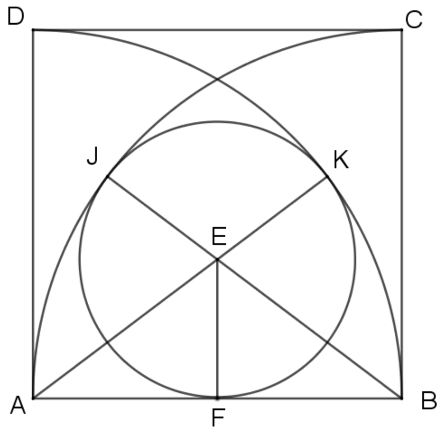
Et son aire mesure :

$$\pi\left(\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right).$$

Exercice 6 :

Trouver le rayon de ce cercle





Le cercle est tangent en deux points J et K

→s'il n'était pas tangent, il y aurait deux points d'intersection avec chaque courbe.

On peut définir le centre du cercle en tant que point d'intersection des segments $[AK]$ et $[BJ]$.

Soit r le rayon du cercle, les coordonnées du centre E sont $\left(\frac{1}{2};r\right)$.

Le cercle est également tangent au segment $[AB]$ au point F d'abscisse $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

On peut définir quelques longueurs :

$$AE = AK - EK = 1 - r$$
$$BE = BJ - EJ = 1 - r$$

Le triangle AEF est rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore :

$$AE^2 = AF^2 + EF^2$$

$$\Leftrightarrow \ (1-r)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-2r+r^2=\frac{1}{4}+r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2r=\frac{1}{4}-1$$

$$\Leftrightarrow \quad -2r=-\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad r=-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

Deuxième méthode :

Soit r le rayon de ce cercle.

Le cercle passe par les points de coordonnées $\left(\frac{1}{2};0\right)$ et $\left(\frac{1}{2};2r\right)$.

Equation de la première courbe sur l'intervalle $[0;1]$:

$$x^2+y^2=1^2 \quad \Leftrightarrow \quad y=\sqrt{1-x^2}$$

Equation de la deuxième courbe sur l'intervalle $[0;1]$:

$$(x-1)^2+y^2=1^2 \quad \Leftrightarrow \quad y=\sqrt{1-(x-1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad y=\sqrt{2x-x^2}.$$

Soit $C\left(\frac{1}{2};r\right)$ le centre du cercle de rayon r, l'équation du cercle est :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-r)^2=r^2$$

On pose $Y=y-r \quad \Leftrightarrow \quad y=Y+r$, les trois équations obtenues deviennent :

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad Y+r=\sqrt{1-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad Y=\sqrt{1-x^2}-r$$

$$y=\sqrt{2x-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad Y+r=\sqrt{2x-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad Y=\sqrt{2x-x^2}-r$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+Y^2=r^2 \quad \Leftrightarrow \quad Y^2=r^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad Y=\sqrt{r^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Le point d'intersection du cercle avec chacune des courbes s'écrit :

$$\sqrt{1-{x_B}^2}-r=\sqrt{r^2-\left(x_B-\frac{1}{2}\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1-{x_B}^2-2r\sqrt{1-{x_B}^2}+r^2=r^2-\left(x_B-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{2x_C-x^2}-r=\sqrt{r^2-\left(x_C-\frac{1}{2}\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x_C-x^2-2r\sqrt{2x_C-x^2}+r^2=r^2-\left(x_C-\frac{1}{2}\right)^2$$

La première équation se simplifie :

$$1-{x_B}^2-2r\sqrt{1-{x_B}^2}=-\left({x_B}^2-x_B+\frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-{x_B}^2-2r\sqrt{1-{x_B}^2}=-{x_B}^2+x_B-\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad -2r\sqrt{1-{x_B}^2}=x_B-\frac{1}{4}-1$$

$$\Leftrightarrow \quad -2r\sqrt{1-{x_B}^2}=x_B-\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x_B{}^2} = \frac{x_B - \frac{5}{4}}{-2r}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x_B{}^2} = -\frac{x_B}{2r} + \frac{5}{8r}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x_B{}^2} = \frac{-4x_B+5}{8r}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-x_B{}^2 = \frac{16x_B{}^2 - 40x_B + 25}{64r^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 64r^2 - 64r^2x_B{}^2 = 16x_B{}^2 - 40x_B + 25$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(16+64r^2\right)x_B{}^2 - 40x_B + 25 - 64r^2 = 0$$

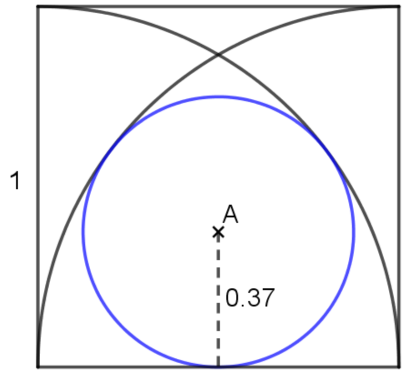
Or le cercle et la courbe ne se coupent qu'en un seul point, il n'y a qu'une seule solution :

$$\Delta = (-40)^2 - 4\times\left(16+64r^2\right)\times\left(25-64r^2\right) = 1600 - 1600 + 4096r^2 - 6400r^2 + 16384r^4$$

$$= 16384r^4 - 2304r^2 = \left(16384r^2 - 2304\right)r^2$$

Soit $r=0$, soit :

$$16384r^2 - 2304 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 16384r^2 = 2304 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{2304}{16384} = \frac{9}{64} \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$$



Exercice 7 :

L'équation de la droite (EF) est de la forme :

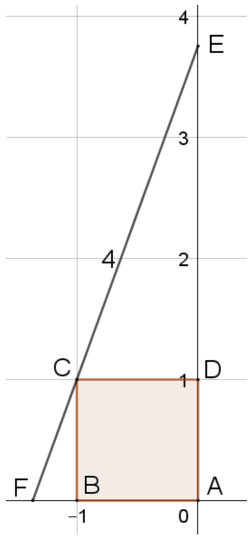
$$y = ax + b.$$

Cette droite passe par le point de coordonnées $(-1;1)$ donc :

$$1 = -a + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 + a$$

L'équation de la droite (EF) devient :

$$y = ax + 1 + a.$$



La droite (EF) passe par les points E et F sur les axes :

- Si $x=0 \rightarrow y = 1+a$ d'où : $\mathrm{E}(0;1+a)$
- Si $y=0 \rightarrow ax+1+a=0 \Leftrightarrow ax = -a-1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-a-1}{a}$

d'où : $\mathrm{F}\left(\dfrac{-a-1}{a};0\right) \Leftrightarrow \mathrm{F}\left(-1-\dfrac{1}{a};0\right)$.

La longueur EF mesure 4 cm, donc :

$$\mathrm{EF}^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{-a-1}{a}\right)^2 + \left(-(1+a)\right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2+2a+1}{a^2}+1+2a+a^2=16$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2+2a+1+a^2+2a^3+a^4=16a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2+2a+1+a^2+2a^3+a^4-16a^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4+2a^3-14a^2+2a+1=0 \qquad \rightarrow \text{inexploitable}$$

Trigonométrie en sachant que les angles $\widehat{\mathrm{BFC}}$ et $\widehat{\mathrm{DCE}}$ sont égaux :

$$\tan \widehat{\mathrm{BFC}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{FB}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AF}-\mathrm{AB}}=\frac{1}{\left|\frac{-a-1}{a}\right|-1}=\frac{1}{\frac{a+1}{a}-\frac{a}{a}}=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a$$

$$\tan \widehat{\mathrm{DCE}}=\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{AE}-\mathrm{AD}}{1}=1+a-1=a$$

$$\tan \widehat{\mathrm{AFE}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF}}=\frac{1+a}{\left|\frac{-a-1}{a}\right|}=\frac{1+a}{\frac{a+1}{a}}=a$$

Ainsi :

$$\mathrm{FB}=\frac{\mathrm{BC}}{\tan \mathrm{BFC}}=\frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \mathrm{DE}=\mathrm{CD}\times\tan\widehat{\mathrm{DCE}}=a.$$

Le segment $[\mathrm{EF}]$ mesure 4 cm :

$$(\mathrm{EC}+\mathrm{CF})^2=16 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{1^2+a^2}+\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2}\right)^2=16$$

$$\Leftrightarrow \quad 1^2+a^2+1^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2+2\times\sqrt{1^2+a^2}\times\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2}=16$$

$\rightarrow$inexploitable

REVENONS SUR :

La longueur EF mesure 4 cm, donc :

$$\mathrm{EF}^2=16 \quad \Leftrightarrow \quad \left(-1-\frac{1}{a}\right)^2+\left(-(1+a)\right)^2=16$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}+1+2a+a^2=16$$

On remarque que :

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2+\frac{1}{a^2}$$

Et l'équation devient :

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{2}{a}+2a=16$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+2\left(a+\frac{1}{a}\right)=16$$

On pose $t=a+\frac{1}{a}$, l'équation devient :

$$t^2+2t-16=0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 2^2 - 4\times1\times(-16) = 4+64 = 68$$

Les racines sont :

$$t_1 = \frac{-2-\sqrt{68}}{2\times1} = -1-\sqrt{17} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-2+\sqrt{68}}{2\times1} = -1+\sqrt{17}$$

Or $a>0$ et $\frac{1}{a}>0$ donc $a+\frac{1}{a}>0$: on retient uniquement la deuxième solution :

$$a+\frac{1}{a} = -1+\sqrt{17} \Leftrightarrow a^2+\left(1-\sqrt{17}\right)a+1=0$$

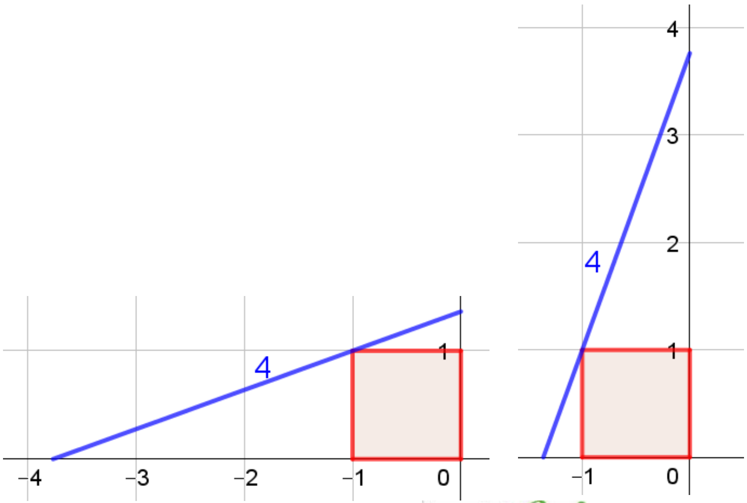
Le discriminant est :

$$\Delta = \left(1-\sqrt{17}\right)^2 - 4\times1\times1 = 1-2\sqrt{17}+17-4 = 14-2\sqrt{17}$$

Les racines sont :

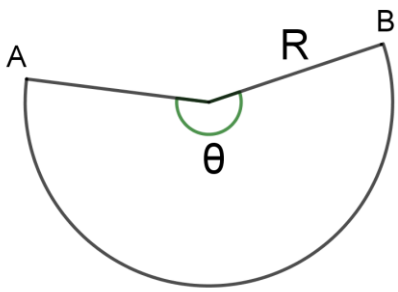
$$a_1 = \frac{-\left(1-\sqrt{17}\right)-\sqrt{14-2\sqrt{17}}}{2\times1} = \frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{14-2\sqrt{17}}}{2} \simeq 0{,}3622\,\text{m}$$

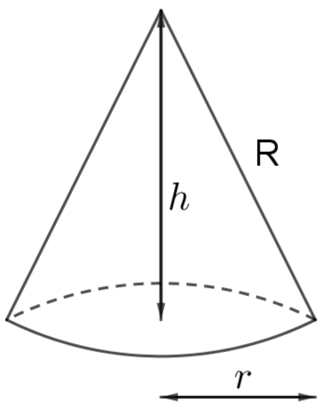
et $$a_2 = \frac{-\left(1-\sqrt{17}\right)+\sqrt{14-2\sqrt{17}}}{2\times1} = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{14-2\sqrt{17}}}{2} \simeq 2{,}7609\,\text{m}$$



Exercice 8 :

On considère le patron d'un cône de révolution.
Si l'on considère que la valeur de la génératrice R reste constante, pour quelle valeur de l'angle θ *le volume du cône devient-il maximal ?*





La formule du volume d'un cône est :

$$v = \frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{3} = \frac{\pi\times r^2\times h}{3}$$

r étant le rayon de la base et h la hauteur du cône.

La longueur de l'arc de cercle AB vaut :

$$\text{AB} = \text{R} \times \theta .$$

Or la longueur de l'arc de cercle AB est également égale au périmètre p de la base du cône de révolution de rayon r, donc :

$$p = 2\pi \times r = \text{R} \times \theta$$

On en déduit :

$$r = \frac{\text{R} \times \theta}{2\pi} .$$

D'autre part, d'après le théorème de Pythagore :

$$h^2 + r^2 = \text{R}^2$$

Donc : $$h = \sqrt{\text{R}^2 - r^2} = \sqrt{\text{R}^2 - \left(\frac{\text{R} \times \theta}{2\pi}\right)^2} .$$

Le volume devient :

$$\begin{aligned} v &= \frac{\pi}{3} \times r^2 \times h \\ &= \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{\text{R} \times \theta}{2\pi}\right)^2 \times \sqrt{\text{R}^2 - \left(\frac{\text{R} \times \theta}{2\pi}\right)^2} \\ &= \frac{\pi}{3} \times \frac{\text{R}^2 \times \theta^2}{4\pi^2} \times \sqrt{\text{R}^2 - \frac{\text{R}^2 \times \theta^2}{4\pi^2}} \\ &= \frac{\text{R}^2}{12\pi} \times \theta^2 \times \text{R}\sqrt{1 - \frac{\theta^2}{4\pi^2}} \\ &= \frac{\text{R}^3}{12\pi} \times \theta^2 \times \sqrt{\frac{4\pi^2 - \theta^2}{4\pi^2}} \\ &= \frac{\text{R}^3}{12\pi} \times \theta^2 \times \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \\ &= \frac{\text{R}^3}{24\pi^2} \times \theta^2 \times \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \end{aligned}$$

Etude de la fonction v dépendant uniquement de la variable θ :

$$\begin{aligned} v'(\theta) &= \frac{\text{R}^3}{24\pi^2} \times \left[2\theta \times \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} + \theta^2 \times \frac{-2\theta}{2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right] \\ &= \frac{\text{R}^3}{24\pi^2} \times \left[2\theta \times \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} - \frac{\theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right] \\ &= \frac{\text{R}^3}{24\pi^2} \times \theta \times \left[2 \times \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} - \frac{\theta^2}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right] \\ &= \frac{\text{R}^3}{24\pi^2} \times \theta \times \left[\frac{2 \times \left(\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}\right)^2 - \theta^2}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2} \times \theta \times \left[\frac{2 \times (4\pi^2 - \theta^2) - \theta^2}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right]$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2} \times \frac{\theta}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \times (8\pi^2 - 3\theta^2)$$

θ étant positif, le rapport $\dfrac{\theta}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}}$ est positif.

Le signe de la dérivée s'obtient par l'étude :

$$8\pi^2 - 3\theta^2 > 0 \Leftrightarrow -3\theta^2 > -8\pi^2$$

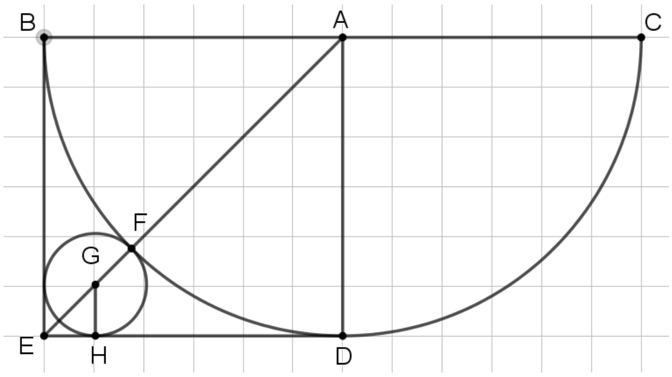
$$\Leftrightarrow \theta^2 < \frac{8\pi^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \theta < \sqrt{\frac{8\pi^2}{3}}$$

La fonction volume augmente donc jusqu'à la valeur $\theta = \sqrt{\dfrac{8\pi^2}{3}}$ puis elle diminue.

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{8\pi^2}{3}} \simeq 5{,}130\, rad \simeq 293{,}94° .$$

Exercice 9 :



$AB = AD$ donc le quadrilatère ABED est un carré.

Les tangentes étant perpendiculaires au rayon d'un cercle, $(GH) \perp (EH)$.

Nous pouvons identifier certaines longueurs :

$$AB = AD = AF = a$$

$$GF = GH = GE = b$$

$$AE = a \times \sqrt{2}$$

$$GE = b \times \sqrt{2}$$

On peut exprimer la longueur GF de deux manières différentes :

$$GF = b$$

$$GF = AE - AF - GE = AE = a \times \sqrt{2} - a - b \times \sqrt{2}$$

En identifiant ces longueurs, on obtient :

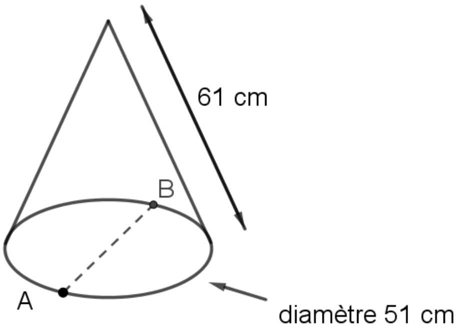
$$b + b \times \sqrt{2} = a \times \sqrt{2} - a \Leftrightarrow b(1 + \sqrt{2}) = a \times (\sqrt{2} - 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{a}{b}$$

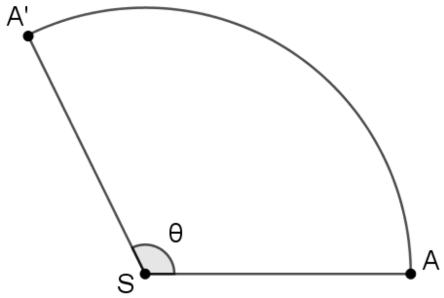
$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Exercice 10 : Problème de la mouche autour du cône

Une mouche est posée au point A extérieur de la base d'un cône placé sur une route pour signaler des travaux. Les dimensions du cône sont disponibles sur le dessin.
La mouche désire se rendre au point diamétralement opposé de la base du cône.
Quelle est la distance minimum que la mouche devra effectuer pour son parcours ? (elle ne peut évidemment pas passer à travers le cône).
La distance sera donnée en cm arrondie au cm le plus proche.



Les données de la figure permettent de déterminer l'angle de la portion de disque constituant le patron de ce cône :



L'arc de cercle AA' mesure :

$$AA' = 51\pi \text{ cm.}$$

Par proportionnalité, on peut trouver la valeur de l'angle θ, en sachant que $AS = 61\text{cm}$:

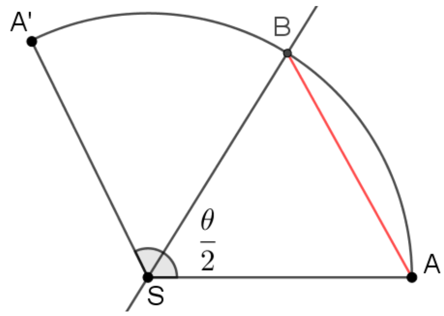
$360° \rightarrow 2\times\pi\times 61 = 122\pi$
$\theta \rightarrow 51\pi$

.

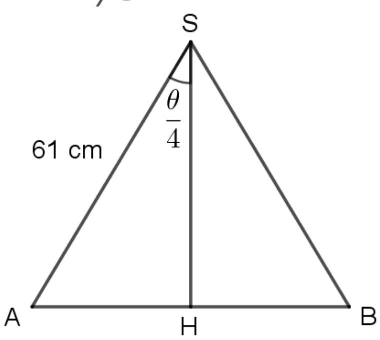
Ainsi :

$$\theta = \frac{51\pi \times 360}{122\pi} = \frac{9180}{61} \simeq 150,49°$$

En traçant la bissectrice de l'angle θ, on obtient le point d'arrivée B :



Le problème revient à calculer la longueur de la base d'un triangle isocèle :



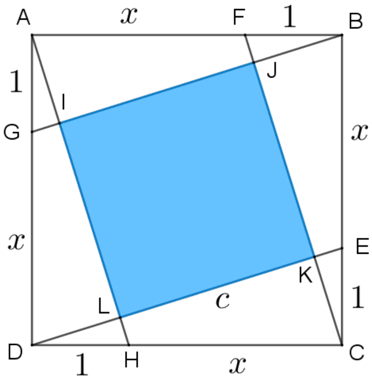
$$AH = AS \times \sin\left(\frac{\theta}{4}\right) = 61 \times \sin\left(\frac{\frac{9180}{61}}{4}\right) \simeq 37,238$$

Ainsi la longueur cherchée est :

$$AB = 2 \times AH \simeq 2 \times 37,238 \simeq 74 \text{ cm.}$$

Exercice 11 :

Quelle proportion du carré ABCD est représentée en bleu ?
Combien vaut cette proportion si $x=2$?



L'objectif de cet exercice est de déterminer le rapport :

$$\frac{\text{aire de IJKL}}{\text{aire de ABCD}}=\frac{c^2}{(1+x)^2}$$

En utilisant le théorème de Pythagore, on remarque que :

$$\text{AH}=\sqrt{(1+x)^2+1^2}=\sqrt{(1+x)^2+1}$$

Aire du grand carré : $(1+x)^2$

Aire du trapèze AFCH : deux formules

- $\text{AF}\times\text{BC}=x\times(1+x)$
- $\text{AH}\times\text{IJ}=\sqrt{(1+x)^2+1}\times c$

En identifiant ces deux expressions, on obtient :

$$\sqrt{(1+x)^2+1}\times c=x\times(1+x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(1+x)^2+1}\times c\right)^2=\left[x\times(1+x)\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \left[(1+x)^2+1\right]\times c^2=x^2\times(1+x)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{(1+x)^2}=\frac{x^2}{(1+x)^2+1}$$

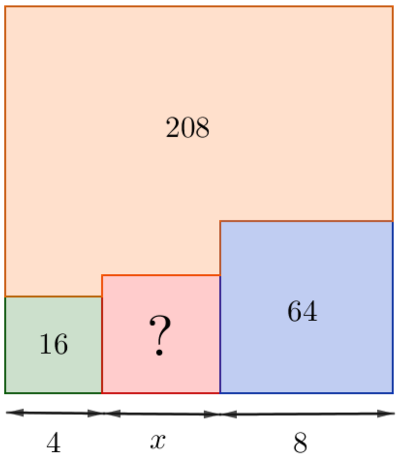
Si $x=2$, on obtient :

$$\frac{c^2}{(1+2)^2}=\frac{2^2}{(1+2)^2+1}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

Exercice 12 :

Quelle est l'aire du petit carré contenu dans le grand carré ?

Le carré vert d'aire égale à 16 a un côté de longueur égale à 4.
Le carré bleu d'aire égale à 64 a un côté de longueur égale à 8.
Le carré rouge d'aire inconnue a un côté de longueur égale à x.



Ainsi le grand carré d'aire égale à x^2 a un côté de longueur égale à :

$$4+x+8=x+12$$

On peut exprimer l'aire totale de deux manières différentes :

$$(x+12)^2=208+16+x^2+64$$

$$\Leftrightarrow x^2+24x+144=x^2+288$$

$$\Leftrightarrow 24x=288-144$$

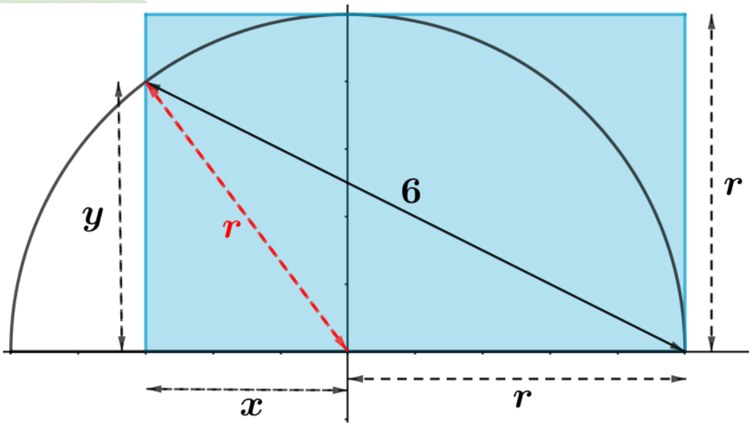
$$\Leftrightarrow x=\frac{144}{24}=6$$

Vérification :

$$208+16+6^2+64=324=18^2$$
avec $4+6+8=18$

Exercice 13 :

Déterminer l'aire du rectangle bleu ci-contre.



Les longueurs x et y sont positives.

D'après le théorème de Pythagore :

$$(r+x)^2+y^2=36.$$
$$\Leftrightarrow\ r^2+2rx+x^2+y^2=36$$

Or : $x^2+y^2=r^2$

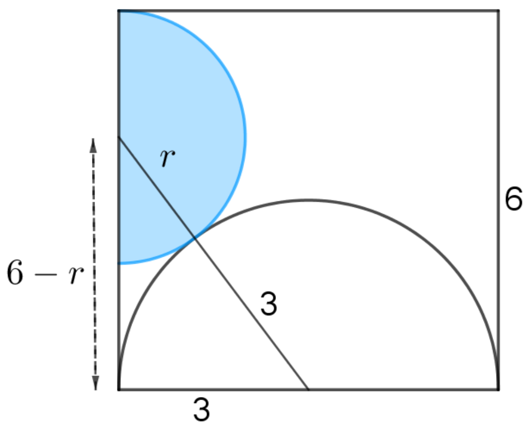
On obtient :

$$r^2+2rx+r^2=36$$
$$\Leftrightarrow\ 2r^2+2rx=36$$
$$\Leftrightarrow\ r(r+x)=18$$

L'aire du rectangle est égale à 18.

Exercice 14 :

Déterminer l'aire du demi-disque bleu ci-contre.



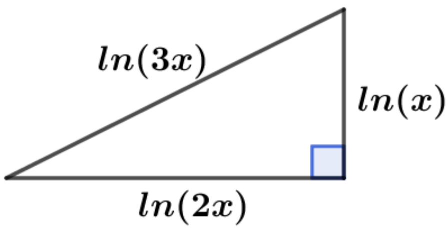
D'après le théorème de Pythagore :

$$(6-r)^2+3^2=(3+r)^2$$
$$\Leftrightarrow\ 36-12r+r^2+9=9+6r+r^2$$
$$\Leftrightarrow\ 36-12r=6r$$
$$\Leftrightarrow\ 36=18r$$
$$\Leftrightarrow\ r=2$$

L'aire cherchée est : $\dfrac{\pi\times 2^2}{2}=2\pi$

Exercice 15 :

Déterminer la valeur de x dans ce triangle logarithmique



D'après le théorème de Pythagore :

$$(\ln x)^2+(\ln(2x))^2=(\ln(3x))^2$$
$$\Leftrightarrow\ (\ln x)^2+(\ln 2+\ln x)^2=(\ln 3+\ln x)^2$$
$$\Leftrightarrow\ (\ln x)^2+(\ln 2)^2+2\ln 2\times\ln x+(\ln x)^2=(\ln 3)^2+2\ln 3\times\ln x+(\ln x)^2$$
$$\Leftrightarrow\ (\ln x)^2+2(\ln 2-\ln 3)\times\ln x+(\ln 2)^2-(\ln 3)^2=0$$
$$\Leftrightarrow\ (\ln x)^2+2\ln\frac{2}{3}\times\ln x+(\ln 2+\ln 3)(\ln 2-\ln 3)=0$$
$$\Leftrightarrow\ (\ln x)^2+2\ln\frac{2}{3}\times\ln x+\ln 6\times\ln\frac{2}{3}=0$$

Discriminant : $\Delta=\left(2\ln\frac{2}{3}\right)^2-4\times1\times\ln 6\times\ln\frac{2}{3}=4\left(\ln\frac{2}{3}\right)^2-4\ln 6\times\ln\frac{2}{3}$

$$=4\ln\frac{2}{3}\left(\ln\frac{2}{3}-\ln 6\right)=4\ln\frac{2}{3}(\ln 2-\ln 3-\ln 2-\ln 3)=4\ln\frac{2}{3}(-\ln 9)=4\ln\frac{3}{2}\times\ln 9$$

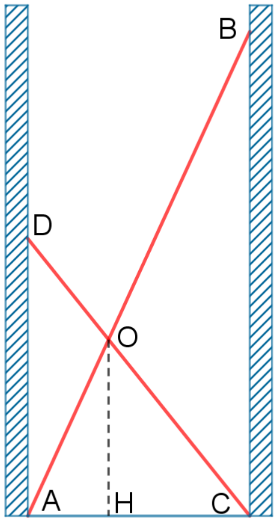
$\Delta > 0$ donc deux solutions, on ne retiendra que la solution positive car $\ln x$ représente une longueur :

$$\ln x = \frac{-2\ln\frac{2}{3} + \sqrt{4\ln\frac{3}{2}\times\ln 9}}{2} = -\ln\frac{2}{3} + \sqrt{\ln\frac{3}{2}\times\ln 9} = \ln\frac{3}{2} + \sqrt{\ln\frac{3}{2}\times\ln 9}$$

Ainsi : $x = e^{\ln\frac{3}{2}+\sqrt{\ln\frac{3}{2}\times\ln 9}} = e^{\ln\frac{3}{2}}\times e^{\sqrt{\ln\frac{3}{2}\times\ln 9}} = \frac{3}{2}e^{\sqrt{\ln\frac{3}{2}\times\ln 9}} \simeq ....$

Exercice 16 :

Deux planches : une grande (AB de trois mètres) et une petite (CD de deux mètres) sont appuyées sur deux murs.
Elles se croisent à un mètre du sol qui est horizontal.
Quelle distance sépare les deux murs ?



Soit x la distance cherchée.
Les murs étant supposés verticaux, d'après le théorème de Thalès, on obtient :

$$\frac{\text{AH}}{\text{AC}} = \frac{\text{AO}}{\text{AB}} = \frac{\text{HO}}{\text{CB}} \Leftrightarrow \frac{\text{AH}}{x} = \frac{\text{AO}}{3} = \frac{1}{\text{CB}}$$

$$\Leftrightarrow \text{AH} = \frac{x}{\text{CB}}$$

$$\frac{\text{CH}}{\text{CA}} = \frac{\text{CO}}{\text{CD}} = \frac{\text{HO}}{\text{AD}} \Leftrightarrow \frac{\text{CH}}{x} = \frac{\text{CO}}{2} = \frac{1}{\text{AD}}$$

$$\Leftrightarrow \text{CH} = \frac{x}{\text{AD}}$$

Sachant que $\text{AH} + \text{CH} = x$, on en déduit :

$$\frac{x}{\text{CB}} + \frac{x}{\text{AD}} = x \Leftrightarrow \frac{1}{\text{CB}} + \frac{1}{\text{AD}} = 1$$

D'après le théorème de Pythagore :

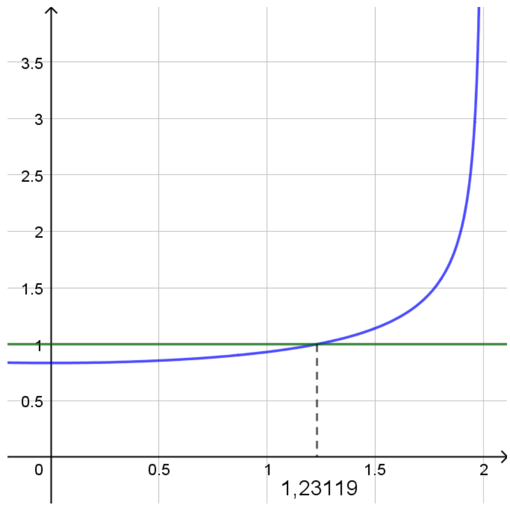
$$\text{AD} = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{et} \quad \text{BC} = \sqrt{9 - x^2}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = 1$$

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$



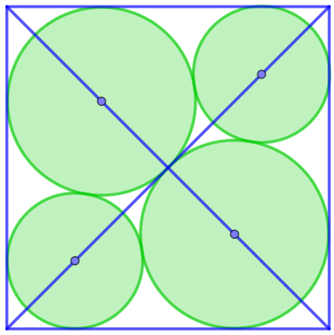
Avec la calculatrice ou géogébra, la solution de l'équation :

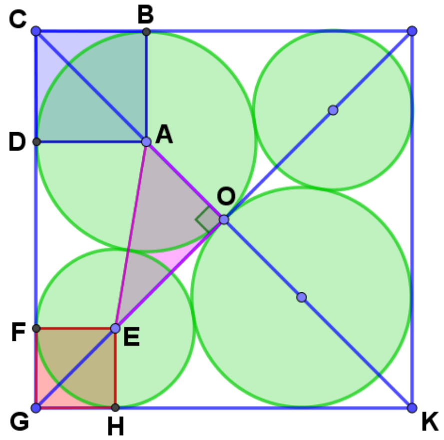
$$f(x) = 1$$

vaut environ 1, 23 m.
1, 23 m environ sépare les deux murs.

Exercice 17 :

Dans un carré de côté 1, on construit quatre cercles comme l'indique la figure ci-contre. Calculer les rayons de ces cercles.





On pose R et r les longueurs respectives des rayons des grands cercles et des petits cercles :

$$R > r$$

Le carré a pour longueur de côté 1 (unité), donc sa diagonale $\mathrm{CK} = \sqrt{2}$ (longueur de la diagonale d'un carré).

Comme O est le milieu de $[\mathrm{CK}]$, alors $\mathrm{OC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Les droites (CB) et (CD) sont tangentes au cercle de centre A, donc le quadrilatère ABCD ayant trois angles droits est un carré dont la diagonale mesure :

$\mathrm{AC} = \mathrm{R}\sqrt{2}$ (longueur de la diagonale d'un carré).

Ainsi :

$$\mathrm{OC} = \mathrm{OA} + \mathrm{AC}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{R} + \mathrm{R}\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{R}\left(1+\sqrt{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{R} = \frac{\sqrt{2}}{2\left(1+\sqrt{2}\right)} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-2}{2\left(1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{2}-2}{2(1-2)} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \simeq 0,293$$

Pour les mêmes raisons que le carré ABCD, EFGH est un carré, donc :

$$\mathrm{EG} = r\sqrt{2}.$$

Le petit cercle et le grand cercle sont tangents, donc :

$$\mathrm{AE} = \mathrm{R} + r.$$

Le triangle OAE est rectangle en O, car (OA) et (OE) sont les diagonales du carré. D'après Pythagore :

$$\mathrm{AE}^2 = \mathrm{AO}^2 + \mathrm{OE}^2$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{OE}^2 = \mathrm{AE}^2 - \mathrm{AO}^2 = (\mathrm{R}+r)^2 - \mathrm{R}^2 = r^2 + 2\mathrm{R}r$$

D'autre part :

$$\mathrm{OG} = \mathrm{OE} + \mathrm{EG}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{OE} = \mathrm{OG} - \mathrm{EG}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{OE}^2 = (\mathrm{OG} - \mathrm{EG})^2$$

On obtient, en identifiant les deux écritures de OE^2 et avec $\mathrm{R} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$:

$$r^2 + 2 \times \frac{2-\sqrt{2}}{2} r = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - r\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2+\left(2-\sqrt{2}\right)r=\frac{1}{2}-2r+2r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}-2r+2r^2-r^2-\left(2-\sqrt{2}\right)r=0$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2-\left(4-\sqrt{2}\right)r+\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2r^2-2\left(4-\sqrt{2}\right)r+1=0$$

Discriminent :

$$\Delta=\left[-2\left(4-\sqrt{2}\right)\right]^2-4\times2\times1=4\left(16-8\sqrt{2}+2\right)-8=64-32\sqrt{2}$$

Deux solutions :

$$r_1=\frac{2\left(4-\sqrt{2}\right)-\sqrt{64-32\sqrt{2}}}{2\times2}=\frac{4-\sqrt{2}-2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}\simeq 0,21$$

$$r_2=\frac{2\left(4-\sqrt{2}\right)+\sqrt{64-32\sqrt{2}}}{2\times2}=\frac{4-\sqrt{2}+2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}\simeq 2,375$$

Or on doit avoir :

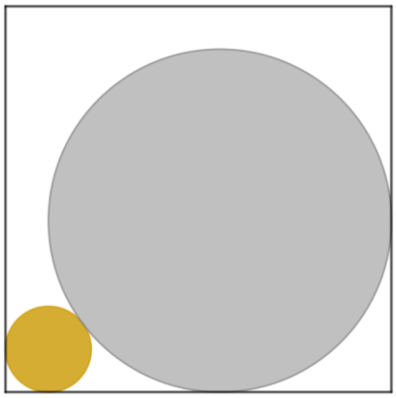
$$R>r.$$

La solution est :

$$r_1=\frac{4-\sqrt{2}-2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}\simeq 0,21$$

Exercice 18 :

Dans une boîte carrée de 27 cm de côté, se trouvent une boule de pétanque et un cochonnet.
Le rayon de la boule vaut quatre fois celui du cochonnet. Quels sont leurs rayons ?

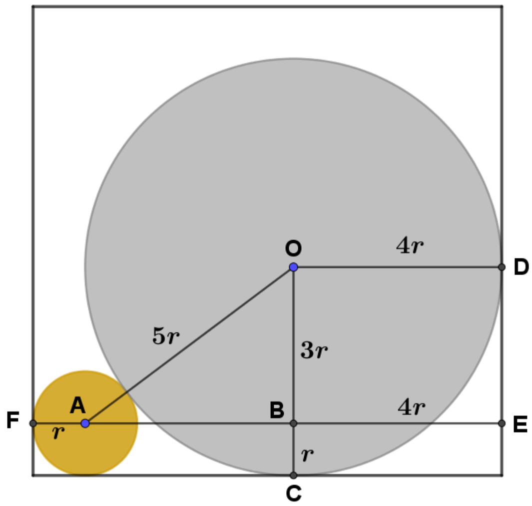


Soit r le rayon du cochonnet.
Le rayon de la boule vaut $4r$ et :

$$\mathrm{OA}=5r.$$

Dans le triangle rectangle OAB, avec le théorème de Pythagore, on obtient :

$$\mathrm{AB}^2=25r^2-9r^2=16r^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{AB}=4r$$



Ainsi :

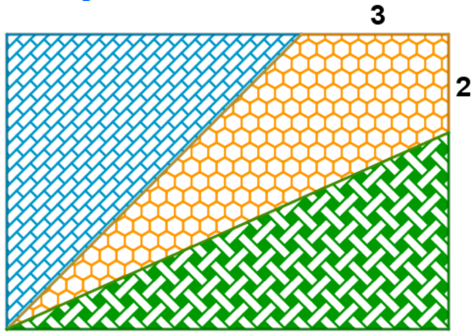
$$\mathrm{FA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BE}=27$$
$$\Leftrightarrow \quad r+4r+4r=27$$
$$\Leftrightarrow \quad r=\frac{27}{9}=3$$

D'où : $\mathrm{R}=4\times r=12$.

Le rayon du cochonnet est de 3 cm et celui de la boule 12 cm

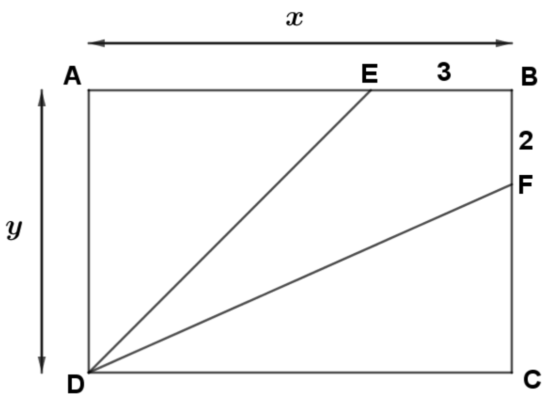
Exercice 19 :

Quelles sont les dimensions du rectangle ci-dessus sachant qu'il a été découpé en trois morceaux de même aire ?



Les triangles rectangles ADE et CDF sont de même aire :

$$\frac{(x-3)y}{2}=\frac{x(y-2)}{2}$$
$$\Leftrightarrow\ xy-3y=xy-2x$$
$$\Leftrightarrow\ 3y=2x$$
$$\Leftrightarrow\ y=\frac{2}{3}x$$



D'autre part, l'aire du triangle ADE vaut $\frac{1}{3}$ de l'aire du rectangle :

$$\frac{(x-3)y}{2}=\frac{1}{3}xy$$
$$\Leftrightarrow\ 3(x-3)y=2xy$$
$$\Leftrightarrow\ 3xy-9y=2xy$$
$$\Leftrightarrow\ xy-9y=0$$

Or : $\Leftrightarrow\ y=\frac{2}{3}x$, donc :

$$x\times\frac{2}{3}x-9\times\frac{2}{3}x=0$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{2}{3}x(x-9)=0$$

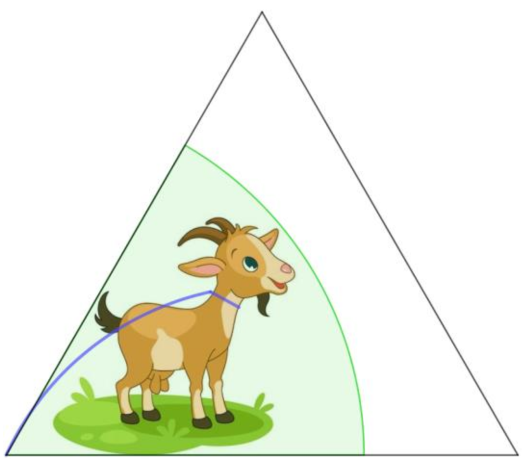
On obtient :

$$x=9 \quad \text{et} \quad y=\frac{2}{3}x=6$$

La largeur du rectangle vaut 6 et sa longueur vaut 9.

Exercice 20 :

Soit un champ possédant 3 côtés de 100m de long formant un triangle équilatéral.
Soit une chèvre (outil idéal de remplacement de la tondeuse) attachée à un des sommets par une corde.
Quelle doit être la longueur de la corde pour qu'elle puisse brouter exactement la moitié de la surface du pré.



Après application du théorème de Pythagore, l'aire du champ est :

$$A_{\text{ABC}}=\frac{100\times\sqrt{100^2-50^2}}{2}=\frac{100\times\sqrt{7500}}{2}=\frac{100\times 50\sqrt{3}}{2}$$
$$=2500\sqrt{3}\simeq 4330{,}13$$

Soit ℓ la longueur de la corde. L'aire de la partie pouvant être broutée est :

$$angle(radian)\times rayon^2=\frac{\pi}{6}\times\ell^2$$

On doit donc résoudre :

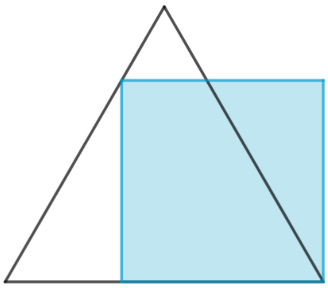
$$\frac{\pi}{6}\times\ell^2=\frac{1}{2}\times 2500\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\quad \ell^2=1250\sqrt{3}\times\frac{6}{\pi}$$

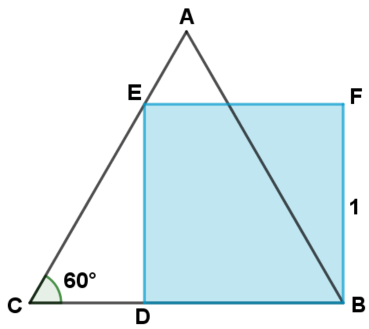
$$\Leftrightarrow\quad \ell=\sqrt{1250\sqrt{3}\times\frac{6}{\pi}}\simeq 64,30\text{ m.}$$

Exercice 21 :

La figure représente un triangle équilatéral et un carré dont trois sommets sont sur le triangle.
Si le périmètre du carré vaut 4, combien vaut le périmètre du triangle ?



Le périmètre du carré étant 4, son côté est 1.
Soit x la longueur du côté du triangle équilatéral dont chaque angle vaut 60°
Par les formules de trigonométrie, on obtient :



$$\tan(60)=\frac{DE}{CD}\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{3}=\frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow\quad\sqrt{3}(x-1)=1$$

$$\Leftrightarrow\quad\sqrt{3}x=1+\sqrt{3}$$

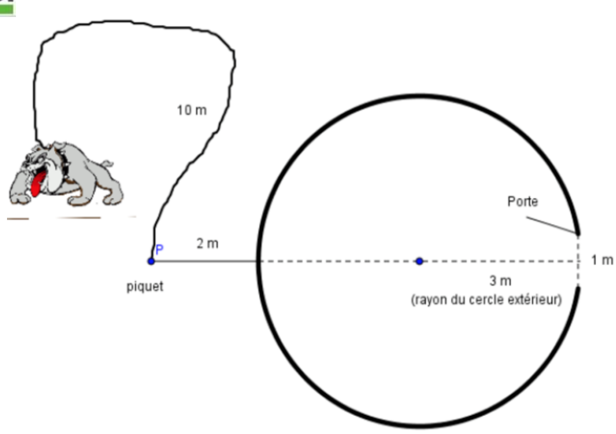
$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

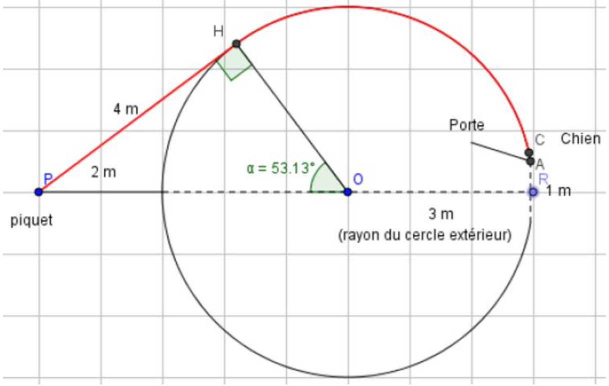
Le périmètre du triangle est $3x$, soit :

$$3\times\frac{3+\sqrt{3}}{3}=3+\sqrt{3}$$

Exercice 22 : (*Auteur : Lionel DARIE : lycee-oiselet.fr*)

Le gardien d'un phare s'est absenté en laissant la porte ouverte. Mais il ne craint pas les intrus : son chien de garde, féroce, veille au grain.
Il est attaché par une chaine de 10 m à un piquet planté à 2 m du phare, diamétralement opposé à la porte. Celle-ci a une largeur de 1 m.
Le rayon du phare (cercle extérieur) est de 3 m.
La figure ci-contre résume la situation.
Malgré la présence du chien, quelqu'un peut-il tout de même s'introduire dans le phare ?





Il s'agit de déterminer si le chien peut atteindre la porte, en tendant au maximum sa chaine.
La situation est traduite par le schéma suivant :
Le chien, en tirant sur sa chaine, va d'abord « tangenter » le bord du phare en H. O étant le centre du phare et P le piquet, le triangle OPH est rectangle en H. On applique le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} & OH^2 + HP^2 = OP^2 \\ \Leftrightarrow\ & 3^2 + HP^2 = 5^2 \\ \Leftrightarrow\ & HP^2 = 25 - 9 = 16 \\ \Leftrightarrow\ & HP = 4 \end{aligned}$$

Ensuite, le chien va enrouler les 6 m de chaine qui lui restent autour du phare.
Le point A représente le bord de la porte et R le milieu de l'ouverture de la porte.

La trigonométrie permet de calculer l'angle $\widehat{POH}$:

$$\cos \widehat{POH} = \frac{3}{5} \ \Leftrightarrow\ \widehat{POH} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \simeq 53{,}13° .$$

Ainsi :

$$\widehat{ROH} = 180 - \widehat{POH} = 126{,}87° .$$

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{HR}$ est :

$$3 \times 126{,}87 \times \frac{\pi}{180} \simeq 6{,}64 \text{ m.}$$

On considère que l'arc $\overset{\frown}{AR}$ et la longueur du segment $[AR]$ sont quasiment égaux, à 0,5 m, donc l'arc $\overset{\frown}{HA}$ mesure environ :

$$6{,}64 - 0{,}5 = 6{,}14 \text{ m.}$$

Comme, à partir de H, il restait 6 m de chaine, cela signifie que le chien n'atteindra pas tout-à-fait le bord de la porte.