Somme de variables aléatoires

Exercice 1A.1 :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous.

X	-1	0	1	2
$p(X)$	0,15	0,36	0,27	0,22

Les variables aléatoires Z et T sont définies par : $Z = -3X$ et $T = 2X + 2$.
Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type :
1) de X 2) de Z 3) de T.

Exercice 1A.2 :

Ervin, qui est entraineur de basket et fin mathématicien, possède dans son équipe deux meneurs de jeu, Djamil et Félicien. Ces deux joueurs ne sont jamais ensembles sur le terrain au cours des matchs. En compilant les données de la saison précédente, il a remarqué que le nombre de lancers francs marqués par ces deux joueurs suit une loi binomiale.
Le nombre de lancers francs marqués par Djamil suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,8$.
Le nombre de lancers francs marqués par Félicien suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,75$.
On remarque que les paramètres diffèrent pour ces deux joueurs car leur temps de jeu n'est pas le même et leur type de jeu aussi.
Ervin se demande alors "Si on joue un grand nombre de matchs dans la saison, combien ces deux meneurs vont-ils, en moyenne, rapporter de points à l'équipe sur les lancers francs ? Et quel sera l'écart type ?"
Aider Ervin à répondre à cette question.

Exercice 1A.3 :

Une roue de loterie comporte cinq secteurs angulaires égaux. Les deux premiers secteurs valent 300 points, le troisième vaut 100 points et les deux derniers secteurs valent -400 points. On fait tourner 4 fois de suite cette roue et on gagne la somme de points obtenus lors des 4 lancers de roues.
Z est la variable aléatoire donnant le gain algébrique en points à la fin du jeu.
Décomposer Z en une somme de variables aléatoires identiques et indépendantes puis calculer $E(Z)$.

Exercice 1A.4 :

X_1, X_2, ..., X_{300} sont 300 variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,23$.
Quelle loi suit $X = X_1 + X_2 + ... + X_{300}$? en déduire $E(X)$.

Exercice 1A.5 :

On lance deux fois de suite un dé cubique et on compte la somme des nombres obtenus. Soit X la variable aléatoire correspondant à cette somme. Pour $k \in \{1;2\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du k-ième dé.

1) Calculer l'espérance et la variance de X_1.
   En déduire l'espérance et la variance de X_2.
2) On note $S_2 = X_1 + X_2$.
   Quelles sont les valeurs possibles de S_2 ?
   Calculer, si possible, l'espérance et la variance de S_2.
3) On note $M_2 = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$.
   Quelles sont les valeurs possibles de M_2 ?
   Calculer, si possible, l'espérance et la variance de M_2.

Exercice 1A.6 :

On considère un échantillon X_1, X_2, ..., X_{20} de variables aléatoires identiquement distribuées. On donne ci-dessous la loi de probabilité de X_1.

$X_1 = x_i$	1	4	8	10
$p(X_1 = x_i)$	0,2	0,2	0,5	0,1

On note $S = X_1 + X_2 + ... + X_{20}$ et $M = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_{20}}{20}$. Associer chaque espérance à sa valeur :

- 120 $\qquad E(5X_1) =$
- 30 $\qquad E(S) =$
- 6 $\qquad E(M) =$

Exercice 1A.1 :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous.

X	-1	0	1	2
$p(\mathrm{X})$	0,15	0,36	0,27	0,22

Les variables aléatoires Z et T sont définies par : $\mathrm{Z}=-3\mathrm{X}$ *et* $\mathrm{T}=2\mathrm{X}+2$.

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type :

1) de X 2) de Z 3) de T.

Par linéarité de l'espérance :

$$E(\mathrm{X})=-1\times 0{,}15+0\times 0{,}36+1\times 0{,}27+2\times 0{,}22=-0{,}15+0{,}27+0{,}44=0{,}56$$

$$E(\mathrm{Z})=E(-3\mathrm{X})=-3E(\mathrm{X})=-3\times 0{,}56=-1{,}68$$

$$E(\mathrm{T})=E(2\mathrm{X}+2)=2E(\mathrm{X})+2=2\times 0{,}56+2=1{,}12+2=3{,}12$$

Calcul de la variance :

$$V(\mathrm{X})=(-1)^2\times 0{,}15+0^2\times 0{,}36+1^2\times 0{,}27+2^2\times 0{,}22-0{,}56^2=0{,}9864$$

$$V(\mathrm{Z})=V(-3\mathrm{X})=(-3)^2V(\mathrm{X})=9\times 0{,}9864=8{,}8776$$

$$V(\mathrm{T})=V(2\mathrm{X}+2)=V(2\mathrm{X})=2^2\times V(\mathrm{X})=4\times 0{,}9864=3{,}9456$$

Calcul de l'écart-type :

$$\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{V(\mathrm{X})}=\sqrt{0{,}9864}\simeq 0{,}993$$

$$\sigma(\mathrm{Z})=\sqrt{V(\mathrm{Z})}=\sqrt{8{,}8776}\simeq 2{,}980$$

$$\sigma(\mathrm{T})=\sqrt{V(\mathrm{T})}=\sqrt{3{,}9456}\simeq 1{,}986$$

Exercice 1A.2 :

Ervin, qui est entraineur de basket et fin mathématicien, possède dans son équipe deux meneurs de jeu, Djamil et Félicien. Ces deux joueurs ne sont jamais ensembles sur le terrain au cours des matchs. En compilant les données de la saison précédente, il a remarqué que le nombre de lancers francs marqués par ces deux joueurs suit une loi binomiale.

Le nombre de lancers francs marqués par Djamil suit la loi binomiale de paramètres n = 5 et p = 0, 8.

Le nombre de lancers francs marqués par Félicien suit la loi binomiale de paramètres n = 8 et p = 0, 75.

On remarque que les paramètres diffèrent pour ces deux joueurs car leur temps de jeu n'est pas le même et leur type de jeu aussi.

Ervin se demande alors "Si on joue un grand nombre de matchs dans la saison, combien ces deux meneurs vont-ils, en moyenne, rapporter de points à l'équipe sur les lancers francs ? Et quel sera l'écart type ?"

Aider Ervin à répondre à cette question.

Soit $B_{\mathrm{D}}(5;0{,}8)$ la loi binomiale suivie par la variable aléatoire X_{D} qui compte le nombre de lancers réussis par Djamil sur 5 lancers.

→en moyenne, Djamil réussit : $E(X_{\mathrm{D}})=5\times 0{,}8=4$ lancers sur 5 tirs.

Soit $B_{\mathrm{F}}(8;0{,}75)$ la loi binomiale suivie par la variable aléatoire X_{F} qui compte le nombre de lancers réussis par Félicien sur 8 lancers.

→en moyenne, Félicien réussit : $E(X_{\mathrm{F}})=8\times 0{,}75=6$ lancers sur 8 tirs.

Pour un grand nombre de matchs dans la saison, on peut admettre que les variables X_{D} et X_{F} sont indépendantes.

Soit $X_{\mathrm{D}}+X_{\mathrm{F}}$ une variable aléatoire dont les valeurs possibles sont $\{0;1;2;...;13\}$:

$$E\left(X_{\mathrm{D}}+X_{\mathrm{F}}\right)=E\left(X_{\mathrm{D}}\right)+E\left(X_{\mathrm{F}}\right)=4+6=10.$$

En moyenne, ils vont réussir 10 lancers francs sur 13 tirs.
Calcul de la variance :

$$V\left(X_{\mathrm{D}}+X_{\mathrm{F}}\right)=V\left(X_{\mathrm{D}}\right)+V\left(X_{\mathrm{F}}\right)=5\times 0,8\times 0,2+8\times 0,75\times 0,25=2,3$$

L'écart-type est :

$$\sigma\left(X_{\mathrm{D}}+X_{\mathrm{F}}\right)=\sqrt{V\left(X_{\mathrm{D}}+X_{\mathrm{F}}\right)}=\sqrt{2,3}\simeq 1,517.$$

Exercice 1A.3 :

Une roue de loterie comporte cinq secteurs angulaires égaux. Les deux premiers secteurs valent 300 points, le troisième vaut 100 points et les deux derniers secteurs valent −400 points. On fait tourner 4 fois de suite cette roue et on gagne la somme de points obtenus lors des 4 lancers de roues.
Z est la variable aléatoire donnant le gain algébrique en points à la fin du jeu.
Décomposer Z en une somme de variables aléatoires identiques et indépendantes puis calculer E(Z).

Soit X la variable aléatoire qui comptabilise le gain à chaque lancer.
Les 5 secteurs angulaires étant égaux, on obtient la loi de probabilité suivante pour X :

X	-400	100	300
$p(\mathrm{X})$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

On obtient l'espérance de X :

$$E(\mathrm{X})=-400\times\frac{2}{5}+100\times\frac{1}{5}+300\times\frac{2}{5}=\frac{-800+100+600}{5}=\frac{-100}{5}=-20.$$

Les 4 lancers étant supposés indépendants, on peut définir la variable aléatoire Z telle que :

$$Z=\mathrm{X}+\mathrm{X}+\mathrm{X}+\mathrm{X}=4\mathrm{X}.$$

Son espérance est :

$$E(Z)=E(4\mathrm{X})=4E(\mathrm{X})=4\times(-20)=-80.$$

Exercice 1A.4 :

X_1, X_2, ..., X_{300} *sont 300 variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre* $p=0,23$.
Quelle loi suit $\mathrm{X}=\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+...+\mathrm{X}_{300}$ *? en déduire* $E(\mathrm{X})$.

La **loi de Bernoulli** est une distribution discrète de probabilité, qui prend la valeur 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $q = 1 - p$. En d'autres termes,

$$p(\mathrm{X}=x)=\begin{cases} p & \text{si } x=1 \\ 1-p & \text{si } x=-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi la variable aléatoire $\mathrm{X}=\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+...+\mathrm{X}_{300}$ peut prendre les valeurs $\{0;1;...;300\}$.
X suit une loi binomiale de paramètres $n=300$ et $p=0,23$.
Ainsi :

$$E(\mathrm{X})=300\times 0,23=69.$$

Exercice 1A.5 :

On lance deux fois de suite un dé cubique et on compte la somme des nombres obtenus. Soit X la variable aléatoire correspondant à cette somme. Pour $k \in \{1;2\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du k-ième dé.

1) *Calculer l'espérance et la variance de X_1. En déduire l'espérance et la variance de X_2.*

L'espérance et la variance d'un dé cubique sont connues :

$$E(X_1) = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$$V(X_1) = 1^2\times\frac{1}{6} + 2^2\times\frac{1}{6} + 3^2\times\frac{1}{6} + 4^2\times\frac{1}{6} + 5^2\times\frac{1}{6} + 6^2 - 3{,}5^2 = \frac{91}{6} - 12{,}25 = \frac{35}{12}$$

Les lancers de dés sont indépendants :

$$E(X_2) = E(X_1) = 3{,}5$$

$$V(X_2) = V(X_1) = \frac{35}{12}$$

2) *On note $S_2 = X_1 + X_2$. Quelles sont les valeurs possibles de S_2 ?*

Calculer, si possible, l'espérance et la variance de S_2.

S_2 peut prendre les valeurs $\{2;3;...;12\}$. Ainsi :

$$E(S_2) = E(X_1) + E(X_2) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$$

$$V(S_2) = V(X_1) + V(X_2) = \frac{35}{12}\times 2 = \frac{35}{6}$$

3) *On note $M_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$. Quelles sont les valeurs possibles de M_2 ?*

Calculer, si possible, l'espérance et la variance de M_2.

M_2 peut prendre les valeurs $\{1;1{,}5;2;...;5{,}5;6\}$.

X_1 et X_2 suivent la même loi de probabilité donc :

$$E(M_2) = E(X_1) = E(X_2) = 3{,}5$$

$$V(M_2) = V\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = V\left(\frac{S_2}{2}\right) = \frac{V(X_1)}{2} = \frac{\frac{35}{6}}{2} = \frac{35}{12}$$

Exercice 1A.6 :

On considère un échantillon X_1, X_2, ..., X_{20} de variables aléatoires identiquement distribuées. On donne ci-dessous la loi de probabilité de X_1.

$X_1 = x_i$	1	4	8	10
$p(X_1 = x_i)$	0,2	0,2	0,5	0,1

On note $S = X_1 + X_2 + ... + X_{20}$ et $M = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_{20}}{20}$.

Associer chaque espérance à sa valeur :

$$E(5X_1) = 5\times E(X_1) = 5\times(1\times 0{,}2 + 4\times 0{,}2 + 8\times 0{,}5 + 10\times 0{,}1)$$
$$= 5\times(0{,}2 + 0{,}8 + 4 + 1) = 30$$

$$E(S) = 20\times E(X_1) = 20\times(1\times 0{,}2 + 4\times 0{,}2 + 8\times 0{,}5 + 10\times 0{,}1) = 120$$

$$E(M) = E(X_1) = 6$$