Somme de variables aléatoires

Exercice 2A.1

On tire 2 jetons successivement d'une urne contenant les jetons 1, 2 et 3 (tirage avec remise).
Soit X le numéro du premier jeton, et Y le numéro du second jeton.
Soit $Z = X + Y$ la variable aléatoire donnant la somme des 2 numéros.
Soit $C = 3Z$ la variable aléatoire donnant le triple de la somme des 2 numéros.
Déterminer les lois de X, de Y, de Z et de C.

Exercice 2A.2

On dispose de deux sacs opaques. L'un contient trois jetons numérotés 0, 2 et 4, l'autre contient 5 jetons numérotés 1 ; 1 ; 3 ; 3 et 3. On tire un jeton de chaque sac et on additionne les numéros obtenus. Z est la variable aléatoire qui donne le résultat.

1. Définir deux variables aléatoires X et Y telles que $Z = X + Y$.
2. Déterminer les valeurs prises par Z et sa loi de probabilité.

Exercice 2A.3

Une urne contient 3 jetons rouges marqués "0" et 2 jetons bleus marqués "1". On tire au hasard deux jetons de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe le numéro du jeton tiré et Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le numéro du jeton tiré.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X + Y$ si le tirage du second jeton :

1. se fait avec remise ;
2. se fait sans remise.

Exercice 2A.4

Un professionnel vend des fauteuils. Sa commission est de 200 € par fauteuil vendu, et ses frais sont de 280 € par jour. Une étude statistique a montré que la variable aléatoire X qui donne le nombre *x* de fauteuils vendus par jour a la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0,1	0,1	0,15	0,25	0,2	0,2

On note Y la variable aléatoire donnant le gain journalier du vendeur.

1. Quelle relation lie X et Y ?
2. a. Quelle est la probabilité que le vendeur soit en déficit à la fin de la journée ?
   b. Quel gain moyen journalier peut-il espérer si la conjoncture reste la même ?

Exercice 2A.5

On joue à un jeu qui se déroule en deux étapes.

- Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 9 points.
  Sinon on perd 6 points.
- Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face, on gagne 6 points.
  Sinon on perd 2 points.

On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de points de la première phase et Y la variable aléatoire qui correspond à la deuxième phase. Ainsi, S la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points, est la somme des deux ; c'est-à-dire S = X + Y.
Déterminer la valeur exacte de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire S.
En déduire une valeur approchée au centième près de l'écart type de la variable aléatoire S.

Exercice 2A.6

Un industriel fabrique des plats en verre qui doivent résister à de fortes température afin de pouvoir être utilisés dans un four de cuisson. Pour vérifier la résistance du plat, on le soumet à une température de 350 ˚C. On a

constaté qu'en moyenne, sur un grand nombre de plats testés sortant de l'usine, 1,5 % des plats ne supportent pas une telle température et cassent.
On choisit au hasard 200 plats produits et on effectue pour chacun d'eux le test de résistance. Etant donné le grand nombre de plats produit, on admet que ce choix peut être assimilé à un tirage fait de façon indépendante avec remise. On désigne par R la v.a comptant le nombre de plats résistants au test.
Calculer $E(\mathrm{R})$ et $\sigma(\mathrm{R})$. Interpréter les résultats.

Exercice 2A.7

Le directeur de l'entreprise Gexploat a classé ses salariés en fonction de leur investissement dans la société. Il a distingué 3 groupes :

- groupe A formé des 30 % des salariés qui s'investissent peu.
- groupe B formé des 50 % des salariés dont l'investissement est acceptable.
- groupe C formé des 20 % des salariés dont l'investissement est important.

Le directeur choisit 10 fois de suite un salarié au hasard (les 10 choix sont donc indépendants), et obtient ainsi un échantillon de 10 salariés.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de salariés du groupe A dans l'échantillon.
On définit de même Y qui donne le nombre de salariés du groupe B et Z qui donne le nombre de salariés du groupe C.

1. Que dire de X, de Y et de Z ?
2. Déterminer $p(\mathrm{X}=2)$, $p(\mathrm{X}\geq 3)$ (arrondies à 0,001 près).
3. Déterminer $E(\mathrm{X})$ et $E(\mathrm{Y})$ et de $E(\mathrm{Z})$.
4. Quelle est la nature de Z ? Retrouver alors la valeur de $E(\mathrm{Z})$.
5. Déterminer $V(\mathrm{X})$, $V(\mathrm{Y})$ et $V(\mathrm{Z})$.
6. Déterminer $p(\mathrm{Y}=3)$ et $p(\mathrm{Z}=5)$ (arrondies à 0,001 près).
7. On admet que :
   - les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si
     pour tous x et y, $p(\mathrm{X}=x \text{ et } \mathrm{Y}=y)=p(\mathrm{X}=x)\times p(\mathrm{Y}=y)$
   - si les variables X et Y sont indépendantes, alors $V(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=V(\mathrm{X})+V(\mathrm{Y})$.

   Dans cet exercice, les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2A.8

À la fin de l'année civile, la gérante d'un garage automobile spécialisé s'intéresse au prix payé par ses clients pour les pneus (par deux) et les plaquettes de frein.
Elle remarque, pour les plaquettes de frein, que :

- 12 % des clients paient 70 € ;
- 47 % des clients paient 90 € ;
- 40 % des clients paient 120 € ;
- 1 % des clients paient 160 €.

Pour les deux pneus, elle a établi que :

- 45 % des clients paient 100 € ;
- 40 % des clients paient 150 € ;
- 15 % des clients paient 200 €.

On note X la variable aléatoire correspondant au prix payé pour le changement des plaquettes de frein, et Y la variable aléatoire correspondant au prix payé pour le changement des deux pneus.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, puis celle de la variable aléatoire Y.
2. **a.** Soit Z_1 la variable aléatoire correspondant au prix payé par un client changeant à la fois deux pneus et ses plaquettes de frein. Exprimer la variable aléatoire Z_1 en fonction des variables aléatoires X et Y.
b. À quel prix moyen le changement de deux pneus et des plaquettes de frein s'élève-t-il ?

3. Certains clients souhaitent changer leurs plaquettes de frein et les quatre pneus, tous identiques. Soit Z_2 la variable aléatoire correspondant au prix alors payé.
   Exprimer la variable aléatoire Z_2 en fonction de X et Y puis déterminer $E(Z_2)$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 2A.9

Afin de réguler le trafic automobile, le maire d'une commune a décidé de régler les trois feux de la voie principale de manière à obtenir les résultats suivants :

- 80 % des automobilistes doivent s'arrêter au premier feu ;
- 30 % des automobilistes doivent s'arrêter au second feu ;
- 65 % des automobilistes doivent s'arrêter au troisième feu.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux auxquels s'arrête un automobiliste pris au hasard.

1. Justifier qu'on peut écrire $X = X_1 + X_2 + X_3$ où, pour tout $k \in \{1;2;3\}$, X_k étant la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'automobiliste s'est arrêté au feu *k* et 0 sinon.
2. Déterminer les lois de probabilité des trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3.
3. En déduire $E(X)$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 2A.10

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	-10	5	20
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{1}{5}$

On considère un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de la loi suivie par X et la variable aléatoire moyenne M_n.
Déterminer la taille de l'échantillon *n* à partir de laquelle la variance de M_n devient inférieure à 0,05.

Exercice 2A.11

Dans un jeu de hasard, un participant doit piger deux cartons dans une urne contant 2 cartons noirs et 5 cartons blancs. Lorsqu'il pige le premier carton, il ne le remet pas dans l'urne. S'il pige deux cartons noirs, le participant se voit remettre un prix de participation.
Quel est la probabilité de piger deux cartons noirs P(N,N) ?

Exercice 2A.12

Lors d'un anniversaire, un invité pige 3 types de chocolats dans une boîte. Évidemment lorsqu'il a pigé un chocolat dans la boîte, il ne le remet pas dans celle-ci. Dans cette boîte, il y a :

- 4 chocolats noirs (N)
- 4 chocolats au lait (L)
- 2 chocolats blancs (B).

Quelle est la probabilité de piger trois chocolats de la même sorte?

Exercice 2A.1

On tire 2 jetons successivement d'une urne contenant les jetons 1, 2 et 3 (tirage avec remise).
Soit X le numéro du premier jeton, et Y le numéro du second jeton.
Soit $Z = X + Y$ la variable aléatoire donnant la somme des 2 numéros.
Soit $C = 3Z$ la variable aléatoire donnant le triple de la somme des 2 numéros.
Déterminer les lois de X, de Y, de Z et de C.

Les v.a. X et Y suivent la même loi de probabilité et peuvent prendre les valeurs $\{1;2;3\}$:

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

La v.a. Z peut prendre les valeurs $\{2;3;4;5;6\}$, avec les probabilités suivantes, les évènements X et Y étant supposés indépendants :

$$p(Z=2) = p(X=1 \text{ et } Y=1) = p(X=1)\times p(Y=1) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$p(Z=3) = p(X=2 \text{ et } Y=1) + p(X=1 \text{ et } Y=2) = p(X=2)\times p(Y=1) + p(X=1)\times p(Y=2) = \frac{2}{9}$$

$$p(Z=5) = p(X=3 \text{ et } Y=2) + p(X=2 \text{ et } Y=3) = p(X=3)\times p(Y=1) + p(X=1)\times p(Y=3) = \frac{2}{9}$$

$$p(Z=6) = p(X=3 \text{ et } Y=3) = p(X=3)\times p(Y=3) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Par déduction : $p(Z=4) = \frac{3}{9}$

On obtient la loi de probabilité de Z :

x_i	2	3	4	5	6
$p(Z = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

La v.a. C peut prendre les valeurs $\{6;9;12;15;18\}$, les probabilités sont les mêmes :

x_i	6	9	12	15	18
$p(C = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Exercice 2A.2

On dispose de deux sacs opaques. L'un contient trois jetons numérotés 0, 2 et 4, l'autre contient 5 jetons numérotés 1 ; 1 ; 3 ; 3 et 3. On tire un jeton de chaque sac et on additionne les numéros obtenus. Z est la variable aléatoire qui donne le résultat.

1. *Définir deux variables aléatoires X et Y telles que $Z = X + Y$.*
   Soit X le numéro du premier jeton, et Y le numéro du second jeton. Leurs lois de probabilités sont les suivantes :

x_i	0	2	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	1	3
$p(Y = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

2. *Déterminer les valeurs prises par Z et sa loi de probabilité.*

La v.a. Z peut prendre les valeurs $\{1;3;5;7\}$, avec les probabilités suivantes, les évènements X et Y étant supposés indépendants :

$$p(Z=1)=p(X=0 \text{ et } Y=1)=p(X=0)\times p(Y=1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$$

$$p(Z=3)=p(X=0 \text{ et } Y=3)+p(X=2 \text{ et } Y=1)$$

$$=p(X=0)\times p(Y=3)+p(X=2)\times p(Y=1)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{5}{15}$$

$$p(Z=5)=p(X=2 \text{ et } Y=3)+p(X=4 \text{ et } Y=1)$$

$$=p(X=2)\times p(Y=3)+p(X=4)\times p(Y=1)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{5}{15}$$

$$p(Z=7)=p(X=4 \text{ et } Y=3)=p(X=4)\times p(Y=3)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{15}.$$

On obtient la loi de probabilité de Z :

x_i	1	3	5	7
$p(Z=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{3}{15}$

Exercice 2A.3

Une urne contient 3 jetons rouges marqués "0" et 2 jetons bleus marqués "1". On tire au hasard deux jetons de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe le numéro du jeton tiré et Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le numéro du jeton tiré.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z=X+Y$ *si le tirage du second jeton :*

1. *se fait avec remise ;*
2. *se fait sans remise.*

Tirage avec remise :

Les v.a. X et Y suivent la même loi de probabilité :

x_i	0	1
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

La v.a. Z peut prendre les valeurs $\{0;1;2\}$, avec les probabilités suivantes, les évènements X et Y étant supposés indépendants :

$$p(Z=0)=p(X=0 \text{ et } Y=0)=p(X=0)\times p(Y=0)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

$$p(Z=1)=p(X=1 \text{ et } Y=0)+p(X=0 \text{ et } Y=1)$$

$$=p(X=1)\times p(Y=0)+p(X=0)\times p(Y=1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$$

$$p(Z=2)=p(X=1 \text{ et } Y=1)=p(X=1)\times p(Y=1)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$$

On obtient la loi de probabilité de Z :

x_i	0	1	2
$p(Z=x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

Tirage sans remise :

La v.a. X suit la loi de probabilité :

x_i	0	1
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

Y peut prendre les valeurs 0 ou 1 mais ses probabilités sont conditionnées par le premier tirage.

$$p_{X=0}(Y=0)=\frac{2}{4} \quad , \quad p_{X=0}(Y=1)=\frac{2}{4} \quad , \quad p_{X=1}(Y=0)=\frac{3}{4} \quad , \quad p_{X=1}(Y=1)=\frac{1}{4}$$

La v.a. Z peut prendre les valeurs $\{0;1;2\}$, avec les probabilités suivantes, les évènements X et Y étant supposés indépendants :

$$p(Z=0)=p(X=0 \text{ et } Y=0)=p(X=0)\times p_{X=0}(Y=0)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$$

$$p(Z=1)=p(X=1 \text{ et } Y=0)+p(X=0 \text{ et } Y=1)$$

$$=p(X=1)\times p_{X=1}(Y=0)+p(X=0)\times p_{X=0}(Y=1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{12}{20}$$

$$p(Z=2)=p(X=1 \text{ et } Y=1)=p(X=1)\times p_{X=1}(Y=1)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}$$

On obtient la loi de probabilité de Z :

x_i	0	1	2
$p(Z=x_i)$	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{2}{20}$

Exercice 2A.4

Un professionnel vend des fauteuils. Sa commission est de 200 € par fauteuil vendu, et ses frais sont de 280 € par jour. Une étude statistique a montré que la variable aléatoire X qui donne le nombre x de fauteuils vendus par jour a la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X=x_i)$	0,1	0,1	0,15	0,25	0,2	0,2

On note Y la variable aléatoire donnant le gain journalier du vendeur.

1. *Quelle relation lie X et Y ?*

$$Y=200X-280.$$

2. **a.** *Quelle est la probabilité que le vendeur soit en déficit à la fin de la journée ?*

Le vendeur doit assurer au moins deux ventes pour être bénéficiaire.

$$p(X<2)=p(X=0)+p(X=1)=0,1+0,1=0,2$$

b. *Quel gain moyen journalier peut-il espérer si la conjoncture reste la même ?*

Le nombre de fauteuils vendus quotidiennement est donné par l'espérance de X :

$$E(X)=0\times0,1+1\times0,1+2\times0,15+3\times0,25+4\times0,2+5\times0,2$$

$$=0,1+0,3+0,75+0,8+1=2,95$$

On en déduit le gain moyen en calculant l'espérance de Y avec les formules de linéarité de l'espérance :

$$E(Y)=E(200X-280)=200\times E(X)-280=200\times2,95-280=310.$$

Le gain moyen journalier est de 310 €.

Exercice 2A.5

On joue à un jeu qui se déroule en deux étapes.

- *Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 9 points. Sinon on perd 6 points.*
- *Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face, on gagne 6 points. Sinon on perd 2 points.*

On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de points de la première phase et Y la variable aléatoire qui correspond à la deuxième phase. Ainsi, S la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points, est la somme des deux ; c'est-à-dire S = X + Y.
Déterminer la valeur exacte de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire S.
En déduire une valeur approchée au centième près de l'écart type de la variable aléatoire S.

Le dé étant équilibré, on obtient la loi de probabilité suivante pour X :

x_i	-6	9
$p(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

→l'espérance de X est : $E(\mathrm{X})=-6\times\frac{2}{3}+9\times\frac{1}{3}=\frac{-3}{3}=-1$.

→la variance de X est : $V(\mathrm{X})=(-6)^2\times\frac{2}{3}+9^2\times\frac{1}{3}-(E(\mathrm{X}))^2=36\times\frac{2}{3}+81\times\frac{1}{3}-(-1)^2=24+27-1=50$

La pièce étant équilibrée, on obtient la loi de probabilité suivante pour Y :

x_i	-2	6
$p(\mathrm{Y}=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

→l'espérance de Y est : $E(\mathrm{Y})=-2\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{2}=-1+3=2$.

→la variance de Y est : $V(\mathrm{X})=(-2)^2\times\frac{1}{2}+6^2\times\frac{1}{2}-(E(\mathrm{Y}))^2=4\times\frac{1}{2}+36\times\frac{1}{2}-2^2=2+18-4=16$.

La v.a. S correspond au nombre total de points, soit : $\mathrm{S}=\mathrm{X}+\mathrm{Y}$.
Linéarité de l'espérance :

$$E(\mathrm{S})=E(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=E(\mathrm{X})+E(\mathrm{Y})=-1+2=1.$$

Les v.a. X et Y étant indépendantes, on a :

$$V(\mathrm{S})=V(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=V(\mathrm{X})+V(\mathrm{Y})=50+16=66$$

L'écart-type de S est :

$$\sigma(\mathrm{S})=\sqrt{V(\mathrm{S})}=\sqrt{66}\simeq 8{,}12.$$

Exercice 2A.6

Un industriel fabrique des plats en verre qui doivent résister à de fortes température afin de pouvoir être utilisés dans un four de cuisson. Pour vérifier la résistance du plat, on le soumet à une température de 350 °C. On a constaté qu'en moyenne, sur un grand nombre de plats testés sortant de l'usine, 1,5 % des plats ne supportent pas une telle température et cassent.
On choisit au hasard 200 plats produits et on effectue pour chacun d'eux le test de résistance. Etant donné le grand nombre de plats produit, on admet que ce choix peut être assimilé à un tirage fait de façon indépendante avec remise. On désigne par R la v.a comptant le nombre de plats résistants au test.
Calculer $E(\mathrm{R})$ et $\sigma(\mathrm{R})$. Interpréter les résultats.

Soit X la v.a. égale à 1 si le plat résiste au test et égale à 0 dans le cas contraire. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $n = 0,985$. $(100\% - 1,5\% = 98,5\%)$.

→l'espérance de X est : $E(\mathrm{X}) = 1 \times p = 0,985$.

→la variance de X est : $V(\mathrm{X}) = p(1-p) = 0,985 \times 0,015 = 0,014775$.

Les plats sélectionnés constituent un échantillon $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_{200})$ de taille 200 de variables aléatoires suivant toutes cette même loi de Bernoulli de paramètre $n = 0,985$.

Ainsi :

$$E(\mathrm{R}) = E(\mathrm{X}_1) + ... + E(\mathrm{X}_{200}) = 200 \times 0,985 = 197.$$

$$V(\mathrm{R}) = V(\mathrm{X}_1) + ... + V(\mathrm{X}_{200}) = 200 \times 0,014775 = 2,955$$

$$\sigma(\mathrm{R}) = \sqrt{V(\mathrm{R})} = \sqrt{2,955} \simeq 1,72$$

En moyenne, sur un grand nombre d'échantillons de 200 plats, on peut espérer trouver 197 plats résistants avec un écart-type proche de 1,72.

Exercice 2A.8

Le directeur de l'entreprise Gexploat a classé ses salariés en fonction de leur investissement dans la société. Il a distingué 3 groupes :

- *groupe A formé des 30 % des salariés qui s'investissent peu.*
- *groupe B formé des 50 % des salariés dont l'investissement est acceptable.*
- *groupe C formé des 20 % des salariés dont l'investissement est important.*

Le directeur choisit 10 fois de suite un salarié au hasard (les 10 choix sont donc indépendants), et obtient ainsi un échantillon de 10 salariés.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de salariés du groupe A dans l'échantillon.

On définit de même Y qui donne le nombre de salariés du groupe B et Z qui donne le nombre de salariés du groupe C.

1. *Que dire de X, de Y et de Z ?*

   X donnant le nombre de salariés du groupe A dans l'échantillon de 10 salariés, X peut prendre les valeurs $\{0;1;...;10\}$. La sélection de l'échantillon est considérée comme identique et indépendante menant à deux issues : le salarié est du groupe A ou n'en est pas. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.

   De même, Y suit une binomiale $B(10;0,5)$ et Z suit la binomiale $B(10;0,2)$.

2. *Déterminer* $p(\mathrm{X}=2)$, $p(\mathrm{X} \geq 3)$ *(arrondies à 0,001 près).*

   $$p(\mathrm{X}=2) = \binom{10}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^8 \simeq 0,233$$

   $$p(\mathrm{X} \geq 3) = 1 - p(\mathrm{X} \leq 2) = 1 - \text{binomFRép}(10;0,3;2) \simeq 0,617$$

3. *Déterminer* $E(\mathrm{X}), E(\mathrm{Y})$ *et* $E(\mathrm{Z})$.

   $$E(\mathrm{X}) = 10 \times 0,3 = 3$$

   $$E(\mathrm{Y}) = 10 \times 0,5 = 5$$

   $$E(\mathrm{Z}) = 10 \times 0,2 = 2$$

4. *Quelle est la nature de Z ? Retrouver alors la valeur de* $E(\mathrm{Z})$.

   $$\mathrm{Z} = 10 - \mathrm{X} - \mathrm{Y}$$

   Donc : $E(\mathrm{Z}) = 10 - E(\mathrm{X}) - E(\mathrm{Y}) = 10 - 3 - 5 = 2$

5. *Déterminer* $V(\mathrm{X})$, $V(\mathrm{Y})$ *et* $V(\mathrm{Z})$.

$$V(X)=10\times 0,3\times 0,7=2,1$$
$$V(Y)=10\times 0,5\times 0,5=2,5$$
$$V(Z)=10\times 0,2\times 0,5=1,6$$

6. *Déterminer* $p(Y=3)$ *et* $p(Z=5)$ *(arrondies à 0,001 près).*

$$p(Y=3)=\binom{10}{3}\times 0,5^3\times 0,5^7\simeq 0,117$$
$$p(Z=5)=\binom{10}{5}\times 0,2^5\times 0,8^5\simeq 0,026$$

7. *On admet que :*
- *les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si*
  pour tous x et y, $p(X=x \text{ et } Y=y)=p(X=x)\times p(Y=y)$
- *si les variables X et Y sont indépendantes, alors* $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

Dans cet exercice, les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

$$p(X=2)\times p(Y=3)=0,233\times 0,117\simeq 0,027$$

$(X=2 \text{ et } Y=3)$ ……………………………………

Exercice 2A.9

À la fin de l'année civile, la gérante d'un garage automobile spécialisé s'intéresse au prix payé par ses clients pour les pneus (par deux) et les plaquettes de frein.
Elle remarque, pour les plaquettes de frein, que :
- *12 % des clients paient 70 € ;*
- *47 % des clients paient 90 € ;*
- *40 % des clients paient 120 € ;*
- *1 % des clients paient 160 €.*

Pour les deux pneus, elle a établi que :
- *45 % des clients paient 100 € ;*
- *40 % des clients paient 150 € ;*
- *15 % des clients paient 200 €.*

On note X la variable aléatoire correspondant au prix payé pour le changement des plaquettes de frein, et Y la variable aléatoire correspondant au prix payé pour le changement des deux pneus.

1. *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, puis celle de la variable aléatoire Y.*
La loi de probabilité de X est :

x_i	70	90	120	160
$p(X=x_i)$	0,12	0,47	0,40	0,01

La loi de probabilité de Y est :

x_i	100	150	200
$p(Y=x_i)$	0,45	0,40	0,15

2. a. *Soit* Z_1 *la variable aléatoire correspondant au prix payé par un client changeant à la fois deux pneus et ses plaquettes de frein. Exprimer la variable aléatoire* Z_1 *en fonction des variables aléatoires X et Y.*

$$Z_1=X+Y.$$

b. *À quel prix moyen le changement de deux pneus et des plaquettes de frein s'élève-t-il ?*

$$E(X)=70\times 0,12+90\times 0,47+120\times 0,4+160\times 0,01=100,3$$
$$E(Y)=100\times 0,45+150\times 0,40+200\times 0,15=135.$$

Les v.a. X et Y étant indépendantes, on a :

$$E(Z_1)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=100,3+135=235,3$$

Le prix moyen du changement de deux pneus et des plaquettes de frein est égal à 235,30 €.

3. *Certains clients souhaitent changer leurs plaquettes de frein et les quatre pneus, tous identiques. Soit Z_2 la variable aléatoire correspondant au prix alors payé.*
Exprimer la variable aléatoire Z_2 en fonction de X et Y puis déterminer $E(Z_2)$. Interpréter le résultat obtenu.

$$Z_2 = X+2Y$$
$$E(Z_2)=E(X+2Y)=E(X)+2E(Y)=100,3+2\times135=370,3$$

Le prix moyen du changement de quatre pneus et des plaquettes de frein est égal à 370,30 €.

Exercice 2A.10

Afin de réguler le trafic automobile, le maire d'une commune a décidé de régler les trois feux de la voie principale de manière à obtenir les résultats suivants :

- 80 % des automobilistes doivent s'arrêter au premier feu ;
- 30 % des automobilistes doivent s'arrêter au second feu ;
- 65 % des automobilistes doivent s'arrêter au troisième feu.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux auxquels s'arrête un automobiliste pris au hasard.

1. Justifier qu'on peut écrire $X = X_1 + X_2 + X_3$ où, pour tout $k \in \{1;2;3\}$, X_k étant la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'automobiliste s'est arrêté au feu *k* et 0 sinon.
2. Déterminer les lois de probabilité des trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3.
3. En déduire $E(X)$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 2A.11

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	-10	5	20
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{1}{5}$

On considère un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de la loi suivie par X et la variable aléatoire moyenne M_n.
Déterminer la taille de l'échantillon *n* à partir de laquelle la variance de M_n devient inférieure à 0,05.

On calcule l'espérance et la variance de X : • E(X) = 1 20(−50 + 55 + 80) = 85 20 = 17 4 • V(X) = 1 20(400 + 275 + 1600) − 17 4 2 = 455 4 − 289 16 = 1564 16 ≈ 95, 7 V(Mn) < 0, 05 ⇔ V(X) n < 0, 05 ⇔ n > V(X) 0, 05 ≈ 1950 À partir d'un échantillon de 1950 variables, la variance de Mn est inférieur à 0,05.