Moyennes de variables aléatoires

Exercice 3A.1

On lance 20 fois de suite un dé équilibré à huit faces numérotées de 1 à 8. X est la variable aléatoire qui donne le résultat d'un lancer et S_{20} celle qui donne la somme des numéros obtenus pour les 20 lancers.

a) Etablir la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
c) En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la somme S_{20}.

Exercice 3A.2

Un producteur conditionne 40 mandarines par caisse. Les masses des mandarines, en gramme, sont réparties selon le tableau ci-dessous :

Masse	58	59	60	61	62
Fréquence	0,15	0,20	0,25	0,21	0,19

X est la variable aléatoire qui donne la masse d'une mandarine prise au hasard dans le stock.
La quantité produite est assez grande pour considérer qu'une caisse de 40 est un échantillon de taille 40 de la loi de probabilité de X.

a) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
b) En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la moyenne M_{40}.

Exercice 3A.3

Dans une région, on a recensé la fréquence du nombre de personnes par foyers. Voici les résultats :

Nombre	1	2	3	4	≥ 5
Fréquence	0,36	0,22	0,24	0,12	0,06

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes dans un foyer pris au hasard.
On veut interroger 100 foyers de cette région, que l'on considère comme un échantillon de taille 100 de la loi de probabilité de X.

a) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
b) En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la moyenne M_{100} pour un tel échantillon.

Exercice 3A.4

Dire que deux variables aléatoires X et Y définies sur un même univers sont indépendantes signifie que, pour toute valeur a prise par X et toute valeur b prise par Y, on a :

$$p\left(\{X=a\}\cap\{Y=b\}\right)=p(X=a)\times p(Y=b).$$

1. Le tableau croisé ci-dessous donne les probabilités des évènements de la forme $\{X=a\}\cap\{Y=b\}$ pour deux variables aléatoires X et Y.

X \ Y	0	2	4
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
5	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

a) A l'aide du tableau croisé, établir les lois de probabilité de X et de Y.

b) Calculer le produit $p(X=1)\times p(Y=0)$ et comparer le résultat avec la probabilité de l'évènement $\{X=1\}\cap\{Y=0\}$.

c) De même, comparer $p(\{X=a\}\cap\{Y=b\})$ et $p(X=a)\times p(Y=b)$ pour tous couples $(a;b)$ possibles.

d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Dans chacun des cas ci-dessous, le tableau croisé donne les probabilités des évènements de la forme $\{X=a\}\cap\{Y=b\}$ pour deux variables aléatoires X et Y.

Déterminer les cas où les variables aléatoires sont indépendantes.

a)

X \ Y	10	20
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

b)

X \ Y	0	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
10	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

c)

X \ Y	1	2	3
5	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
10	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$

d)

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

e)

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
1	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{3}{40}$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 3A.1

On lance 20 fois de suite un dé équilibré à huit faces numérotées de 1 à 8. X est la variable aléatoire qui donne le résultat d'un lancer et S_{20} celle qui donne la somme des numéros obtenus pour les 20 lancers.

a) *Etablir la loi de probabilité de X.*

Le dé étant équilibré, toutes les faces sont équiprobables. On obtient la loi de probabilité de X :

X	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

b) *Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.*

$$E(X)=\frac{1}{8}\times1+\frac{1}{8}\times2+\frac{1}{8}\times3+\frac{1}{8}\times4+\frac{1}{8}\times5+\frac{1}{8}\times6+\frac{1}{8}\times7+\frac{1}{8}\times8=\frac{36}{8}=4,5$$

$$V(X)=\frac{1}{8}\times1^2+\frac{1}{8}\times2^2+\frac{1}{8}\times3^2+\frac{1}{8}\times4^2+\frac{1}{8}\times5^2+\frac{1}{8}\times6^2+\frac{1}{8}\times7^2+\frac{1}{8}\times8^2-4,5^2=\frac{204}{8}-\frac{81}{4}=5,25$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{5,25}\simeq2,29$$

c) En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la somme S_{20}.

$$E(S_{20})=20\times E(X)=20\times4,5=90$$

$$V(S_{20})=20\times V(X)=20\times5,25=105$$

$$\sigma(S_{20})=\sqrt{V(S_{20})}=\sqrt{105}\simeq10,25$$

Exercice 3A.2

Un producteur conditionne 40 mandarines par caisse. Les masses des mandarines, en gramme, sont réparties selon le tableau ci-dessous :

Masse	*58*	*59*	*60*	*61*	*62*
Fréquence	*0,15*	*0,20*	*0,25*	*0,21*	*0,19*

X est la variable aléatoire qui donne la masse d'une mandarine prise au hasard dans le stock.
La quantité produite est assez grande pour considérer qu'une caisse de 40 est un échantillon de taille 40 de la loi de probabilité de X.

a) *Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.*

$$E(X)=58\times0,15+59\times0,20+60\times0,25+61\times0,21+62\times0,19=60,09$$

$$V(X)=58^2\times0,15+59^2\times0,20+60^2\times0,25+61^2\times0,21+62^2\times0,19-60,09^2=1,7619$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1,7619}\simeq1,33$$

b) En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la moyenne M_{40}.

$$E(M_{40})=E(X)=60,09$$

$$V(M_{40})=\frac{V(X)}{40}=\frac{1,7619}{40}=0,0440475$$

$$\sigma(M_{40})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{1,7619}}{\sqrt{40}}\simeq0,21$$

Exercice 3A.3

Dans une région, on a recensé la fréquence du nombre de personnes par foyers. Voici les résultats :

Nombre	*1*	*2*	*3*	*4*	≥ 5
Fréquence	*0,36*	*0,22*	*0,24*	*0,12*	*0,06*

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes dans un foyer pris au hasard.
On veut interroger 100 foyers de cette région, que l'on considère comme un échantillon de taille 100 de la loi de probabilité de X.

a) *Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.*

On simplifie les calculs en négligeant les familles ayant plus de 5 enfants qui représentent une très faible proportion de cette population.

$$E(\mathrm{X}) = 1\times 0,36 + 2\times 0,22 + 3\times 0,24 + 4\times 0,12 + 5\times 0,06 = 2,3$$

$$V(\mathrm{X}) = 1^2\times 0,36 + 2^2\times 0,22 + 3^2\times 0,24 + 4^2\times 0,12 + 5^2\times 0,06 - 2,3^2 = 1,53$$

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{V(\mathrm{X})} = \sqrt{1,53} \simeq 1,24$$

b) En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la moyenne M_{100} pour un tel échantillon.

$$E(\mathrm{M}_{100}) = E(\mathrm{X}) = 2,3$$

$$V(\mathrm{M}_{100}) = \frac{V(\mathrm{X})}{100} = \frac{1,53}{100} = 0,0153$$

$$\sigma(\mathrm{M}_{100}) = \frac{\sigma(\mathrm{X})}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{1,53}}{10} \simeq 0,124$$

Exercice 3A.4

Dire que deux variables aléatoires X et Y définies sur un même univers sont indépendantes signifie que, pour toute valeur a prise par X et toute valeur b prise par Y, on a :

$$p(\{X=a\}\cap\{Y=b\}) = p(X=a)\times p(Y=b).$$

1. *Le tableau croisé ci-dessous donne les probabilités des évènements de la forme* $\{X=a\}\cap\{Y=b\}$ *pour deux variables aléatoires X et Y.*

X \ *Y*	*0*	*2*	*4*
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
5	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

a) *A l'aide du tableau croisé, établir les lois de probabilité de X et de Y.*

Les évènements $\{Y=0\}$, $\{Y=2\}$ et $\{Y=4\}$ forment une partition de l'univers des Y.

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(X=1) = p(\{Y=0\}\cap\{X=1\}) + p(\{Y=2\}\cap\{X=1\}) + p(\{Y=4\}\cap\{X=1\})$$
$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24} = \frac{3}{24}+\frac{2}{24}+\frac{1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$p(X=3) = p(\{Y=0\}\cap\{X=3\}) + p(\{Y=2\}\cap\{X=3\}) + p(\{Y=4\}\cap\{X=3\})$$
$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{3}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$p(X=5)=p(\{Y=0\}\cap\{X=5\})+p(\{Y=2\}\cap\{X=5\})+p(\{Y=4\}\cap\{X=5\})$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{3}{24}+\frac{2}{24}+\frac{1}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

La loi de probabilité de X est :

X	1	3	5
$p(\mathrm{X})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Les évènements $\{X=1\}$, $\{X=3\}$ et $\{X=5\}$ forment une partition de l'univers des Y.

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(Y=0)=p(\{X=1\}\cap\{Y=0\})+p(\{X=3\}\cap\{Y=0\})+p(\{X=5\}\cap\{Y=0\})$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$
$$p(Y=2)=p(\{X=1\}\cap\{Y=2\})+p(\{X=3\}\cap\{Y=2\})+p(\{X=5\}\cap\{Y=2\})$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$
$$p(Y=4)=p(\{X=1\}\cap\{Y=4\})+p(\{X=3\}\cap\{Y=4\})+p(\{X=5\}\cap\{Y=4\})$$
$$=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{24}+\frac{2}{24}+\frac{1}{24}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$$

La loi de probabilité de Y est :

Y	0	2	4
$p(\mathrm{Y})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

b) *Calculer le produit $p(X=1)\times p(Y=0)$ et comparer le résultat avec la probabilité de l'évènement $\{X=1\}\cap\{Y=0\}$.*

D'après l'énoncé :

$$p(\{X=1\}\cap\{Y=0\})=\frac{1}{8} \quad \text{et} \quad p(X=1)\times p(Y=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Ainsi : $p(\{X=1\}\cap\{Y=0\})=p(X=1)\times p(Y=0)$

c) *De même, comparer $p(\{X=a\}\cap\{Y=b\})$ et $p(X=a)\times p(Y=b)$ pour tous couples $(a;b)$ possibles.*

$$p(\{X=3\}\cap\{Y=0\})=\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad p(X=3)\times p(Y=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Ainsi : $p(\{X=3\}\cap\{Y=0\})=p(X=3)\times p(Y=0)$

$$p(\{X=5\}\cap\{Y=0\})=\frac{1}{8} \quad \text{et} \quad p(X=5)\times p(Y=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Ainsi : $p(\{X=5\}\cap\{Y=0\})=p(X=5)\times p(Y=0)$

$$p(\{X=1\}\cap\{Y=2\})=\frac{1}{12} \quad \text{et} \quad p(X=1)\times p(Y=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

Ainsi : $p(\{X=1\}\cap\{Y=2\})=p(X=1)\times p(Y=2)$

$$p(\{X=3\}\cap\{Y=2\})=\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad p(X=3)\times p(Y=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Ainsi : $p\left(\{X=3\}\cap\{Y=2\}\right)=p(X=3)\times p(Y=2)$

$p\left(\{X=5\}\cap\{Y=2\}\right)=\frac{1}{12}$ et $p(X=5)\times p(Y=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

Ainsi : $p\left(\{X=5\}\cap\{Y=2\}\right)=p(X=5)\times p(Y=2)$

$p\left(\{X=1\}\cap\{Y=4\}\right)=\frac{1}{24}$ et $p(X=1)\times p(Y=4)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$

Ainsi : $p\left(\{X=1\}\cap\{Y=4\}\right)=p(X=1)\times p(Y=4)$

$p\left(\{X=3\}\cap\{Y=4\}\right)=\frac{1}{12}$ et $p(X=3)\times p(Y=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

Ainsi : $p\left(\{X=3\}\cap\{Y=4\}\right)=p(X=3)\times p(Y=4)$

$p\left(\{X=5\}\cap\{Y=4\}\right)=\frac{1}{24}$ et $p(X=5)\times p(Y=4)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$

Ainsi : $p\left(\{X=1\}\cap\{Y=4\}\right)=p(X=1)\times p(Y=4)$

d) *Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*

Pour toute valeur a prise par X et toute valeur b prise par Y, on a :

$$p\left(\{X=a\}\cap\{Y=b\}\right)=p(X=a)\times p(Y=b)$$

Donc les deux variables aléatoires X et Y définies sur un même univers sont indépendantes.

2. Dans chacun des cas ci-dessous, le tableau croisé donne les probabilités des évènements de la forme $\{X=a\}\cap\{Y=b\}$ pour deux variables aléatoires X et Y.

Déterminer les cas où les variables aléatoires sont indépendantes.

a)

X \ Y	10	20
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

b)

X \ Y	0	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
10	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

c)

X \ Y	1	2	3
5	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
10	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$

d)

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

e)

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
1	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{3}{40}$