# Inégalités de concentration

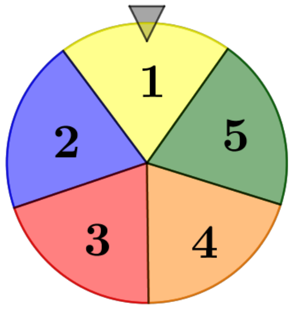
## Exercice 1A.1 :

Le nombre de pièces fabriquées dans une usine en une journée suit une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25.
Donner deux majorations de la probabilité que la production dépasse sur une journée 75 pièces.

## Exercice 1A.2 :

On lance 800 fois une pièce de monnaie non truquée.
Donner une minoration de la probabilité que le nombre de « Pile » obtenus soit compris entre 381 et 419.

## Exercice 1A.3 :




La roue équilibrée ci-contre est partagée en cinq secteurs identiques numérotés de 1 à 5.
On fait tourner la roue 100 fois de suite, X est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le 1 est sorti.

a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance et la variance de X.
c) Justifier que pour tout réel $\delta > 0$ :
$$p\left(|X-20| \geq \delta\right) \leq \frac{16}{\delta^2}.$$
d) En déduire que la probabilité de l'évènement « X prend une valeur en dehors de l'intervalle $[11;29]$ est inférieure ou égale à 0,16.

## Exercice 1A.4 :

Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu$ et d'écart-type $\sigma$.

1) Justifier que pour tout entier naturel $k \geq 1$ :
$$p\left(|X-\mu| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$
2) a) Déterminer une valeur de $k$ pour laquelle :
$$p\left(|X-\mu| \geq k\sigma\right) \leq 0{,}1.$$
b) Interpréter la valeur de $k$ obtenue.

## Exercice 1A.5 :

On tire des boules avec remise dans une urne contenant 60 % de boules blanches.

1) Quelle est la loi de la v.a. X donnant le nombre de boules blanches obtenues après 20 tirages ?
2) a) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de la probabilité de tirer moins de 16 boules blanches, mais plus de 8.
b) Calculer $p(8 < X < 16)$, à $10^{-3}$ près, en utilisant la loi de X et discuter de la minoration obtenue dans la question précédente.

**CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet**

## Exercice 1A.1 :

*Le nombre de pièces fabriquées dans une usine en une journée suit une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25.*

*Donner deux majorations de la probabilité que la production dépasse sur une journée 75 pièces.*

Soit $X$ la v.a. égale au nombre de pièces fabriquées un jour donné.

On cherche à majorer : $p(X \geq 75)$.

D'après l'inégalité de Markov, avec $a = 75$, on a :

$$p(X \geq 75) \leq \frac{E(X)}{75} \Leftrightarrow p(X \geq 75) \leq \frac{50}{75} \Leftrightarrow p(X \geq 75) \leq \frac{2}{3}.$$

Pour utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on doit centrer la v.a. X en lui retirant son espérance :

$$p(X \geq 75) = p(X - 50 \geq 75 - 50) = p(X - 50 \geq 25)$$

Or $\quad p(X - 50 \geq 25) \leq p(|X - 50| \geq 25)$

Donc d'après l'inégalité de Bienaymé- Tchebychev, en posant $t = 25$ :

$$p(|X - 50| \geq 25) \leq \frac{V(X)}{25^2}$$

$$\Leftrightarrow p(|X - 50| \geq 25) \leq \frac{25}{25^2}$$

$\Leftrightarrow p(X \geq 75) \leq \dfrac{1}{25}$, ce qui est une seconde majoration.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit une majoration bien plus précise que l'inégalité de Markov.

## Exercice 1A.2 :

*On lance 800 fois une pièce de monnaie non truquée.*

*Donner une minoration de la probabilité que le nombre de « Pile » obtenus soit compris entre 381 et 419.*

Soit $X$ la v.a. égale au nombre de Pile obtenus lors des 800 lancers de la pièce.

On cherche à minorer la probabilité $p(381 \leq X \leq 419)$.

Pour utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il faut déterminer l'espérance et la variance de $X$.

Les lancers étant identiques et indépendants, menant à deux issues, $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 800$ et $p = \frac{1}{2}$. Ainsi :

$$E(X) = 800 \times \frac{1}{2} = 400 \quad \text{et} \quad V(X) = 800 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 200.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit pour tout réel $t > 0$ :

$$p(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2} \Leftrightarrow -p(|X - E(X)| \geq t) \geq -\frac{V(X)}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - p(|X - E(X)| \geq t) \geq 1 - \frac{V(X)}{t^2}$$

soit : $\quad p(|X - E(X)| < t) \geq 1 - \dfrac{V(X)}{t^2}$ afin d'avoir une majoration de la probabilité.

On remarque que :

$$p(381 \leq X \leq 419) = p(381 - 400 \leq X - E(X) \leq 419 - 400) = p(-19 \leq X - E(X) \leq 19)$$

$$= p(|X - E(X)| \leq 19) = p(|X - E(X)| < 20)$$

Ainsi d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev:

$$p\left(\left|X-400\right|<20\right)\geq 1-\frac{200}{20^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad p\left(\left|X-400\right|<20\right)\geq 1-\frac{1}{2}$$

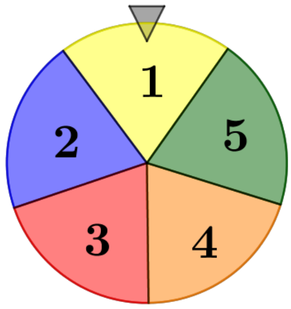
$$\Leftrightarrow \quad p\left(\left|X-400\right|<20\right)\geq \frac{1}{2}$$

On a au moins une chance sur deux d'obtenir entre 381 et 419 Pile lors des 800 lancers de la pièce.

**Exercice 1A.3 :**

*La roue équilibrée ci-contre est partagée en cinq secteurs identiques numérotés de 1 à 5.*

*On fait tourner la roue 100 fois de suite, X est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le 1 est sorti.*




*a) Donner la loi de probabilité de X.*

*b) Déterminer l'espérance et la variance de X.*

*c) Justifier que pour tout réel $\delta>0$ :*

$$p\left(\left|X-20\right|\geq\delta\right)\leq\frac{16}{\delta^2}.$$

*d) En déduire que la probabilité de l'évènement « X prend une valeur en dehors de l'intervalle $[11;29]$ est inférieure ou égale à 0,16.*

**a)** Les lancers de roue sont tous identiques et indépendants, menant à deux issues selon que l'on obtient le 1 ou pas. La variable aléatoire X qui compte le nombre de 1 sortis suit une loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=\frac{1}{5}$.

**b)** $$E\left(X\right)=100\times\frac{1}{5}=20 \quad \text{et} \quad V\left(X\right)=100\times\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=20\times\frac{4}{5}=16.$$

**c)** L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit pour tout réel $\delta>0$ :

$$p\left(\left|X-E\left(X\right)\right|\geq\delta\right)\leq\frac{V\left(X\right)}{\delta^2}$$

Soit : $$p\left(\left|X-20\right|\geq\delta\right)\leq\frac{16}{\delta^2}.$$

**d)** On cherche à majorer la probabilité $p\left(X<11 \text{ ou } X>29\right)$.

On remarque que :

$$\begin{aligned}p\left(X<11 \text{ ou } X>29\right)&=p\left(X-20<11-20 \text{ ou } X-20>29-20\right)\\&=p\left(X-20<-9 \text{ ou } X-20>9\right)\\&=p\left(\left|X-20\right|>9\right)\\&=p\left(\left|X-E\left(X\right)\right|>9\right)\\&=p\left(\left|X-E\left(X\right)\right|\geq 10\right)\end{aligned}$$

**e)** D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en choisissant $\delta=10$ :

$$p\left(\left|X-20\right|\geq 10\right)\leq\frac{16}{10^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad p\left(\left|X-20\right|\geq 10\right)\leq 0{,}16$$

## Exercice 1A.4 :

*Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu$ et d'écart-type $\sigma$.*

**1)** *Justifier que pour tout entier naturel $k \geq 1$ :* $p(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit pour tout réel $\delta > 0$ :

$$p(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$$

En posant $\delta = k\sigma$, on obtient :

$$p(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{V}{(k\sigma)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad p(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{V}{k^2 \times \sigma^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad p(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

**2) a)** *Déterminer une valeur de k pour laquelle $p(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq 0{,}1$.*

$$\frac{1}{k^2} = 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 0{,}1 \times k^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{0{,}1} = k^2 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad k = \sqrt{10}$$

**b)** *Interpréter la valeur de k obtenue.*

On obtient :

$$p\left(|X-\mu| \geq \sqrt{10} \times \sigma\right) \leq 0{,}1$$

Au maximum, 10 % des valeurs de $X$ sont distantes de l'espérance $\mu$ avec un écart égal à $\sqrt{10} \times \sigma$

Au moins 90 % des valeurs $X$ sont dans l'intervalle $\left[\mu - \sqrt{10} \times \sigma ; \mu + \sqrt{10} \times \sigma\right]$.

La Merci MONTPELLIER

## Exercice 1A.5 :

*On tire des boules avec remise dans une urne contenant 60 % de boules blanches.*

**1)** *Quelle est la loi de la v.a. X donnant le nombre de boules blanches obtenues après 20 tirages ?*

Chaque tirage s'effectue de manière identique et indépendante, menant à deux issues « blanche ou non blanche ». La v.a. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}6$.

**2) a)** *En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de la probabilité de tirer moins de 16 boules blanches, mais plus de 8.*

L'espérance de X est :

$$E(\mathrm{X}) = np = 20 \times 0{,}6 = 12.$$

La variance de X est :

$$V(\mathrm{X}) = np(1-p) = 20 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 4{,}8.$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$p(|X - E(\mathrm{X})| \geq 4) \leq \frac{V(\mathrm{X})}{4^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad p(|X-12| \geq 4) \leq \frac{4{,}8}{4^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - p(|X-12| \geq 4) \geq 1 - \frac{4{,}8}{16}$$

$$\Leftrightarrow \quad p(|X-12| < 4) \geq 0{,}7$$

**b)** *Calculer* $p(8 < \mathrm{X} < 16)$, *à* $10^{-3}$ *près, en utilisant la loi de X et discuter de la minoration obtenue dans la question précédente.*

D'après la loi binomiale $B(20;0,6)$ suivie par X, on obtient :

$$p(8 < \mathrm{X} < 16) = p(9 \leq \mathrm{X} \leq 15) = p(\mathrm{X} \leq 15) - p(\mathrm{X} \leq 8) \simeq 0,893$$

Le résultat obtenue est bien supérieur à 0,7.