Inégalité de concentration – Loi des grands nombres

Exercice 2A.1

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire au hasard successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1) Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges tirées.
   a) Donner la loi de probabilité de X.
   b) Déterminer l'espérance et la variance de X.
2) On répète n fois l'expérience.
   X_k donne le nombre de boules tirées lors de la k-ième expérience $(1 \leq k \leq n)$.
   On pose $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$.
   a) Que représente la variable aléatoire M_n ?
   Déterminer son espérance et sa variance.
   b) Justifier que pour tout réel $\delta > 0$:
   $$p\left(\left|M_n - 1,2\right| \geq \delta\right) \leq \frac{0,48}{n\delta^2}.$$
   c) Ecrire l'inégalité précédente dans le cas où $\delta = 0,1$ et $n = 100$. Interpréter cette inégalité.
   d) On prend $\delta = 0,01$. Déterminer une valeur de n telle que :
   $$p\left(\left|M_n - 1,2\right| \geq 0,01\right) \leq 0,48.$$
   Donner une interprétation de cette valeur.

Exercice 2A.2

On tire au hasard un nombre dans l'ensemble $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

1) Soit X la variable aléatoire qui donne ce nombre.
   a) Déterminer la loi de X.
   b) Vérifier que X a pour espérance 4,5 et pour variance 8,25.
2) On répète n fois l'expérience.
   Les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n donnent les n premiers nombres obtenus et on pose :
   $$M_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$
   a) Interpréter la valeur prise par la variable aléatoire M_n.
   b) Justifier que :
   $$p\left(\left|M_n - 4,5\right| \geq 0,5\right) \leq \frac{33}{n}.$$
   c) En déduire que :
   $$p\left(\left|M_n - 4,5\right| < 0,5\right) \geq 1 - \frac{33}{n}.$$
3) a) Trouver une valeur de n telle que :
   $$p\left(\left|M_n - 4,5\right| < 0,5\right) \geq 0,99.$$
   b) Interpréter la valeur trouvée.
   c) Recopier et compléter : « Pour $n \geq$ ….., M_n donne une valeur de 4,5 à une précision de ….. avec un risque de …..

Exercice 2A.3

Dans un avion, un passager est autorisé à mettre en soute un bagage de 23 kg ou moins, sans pénalité.
Une compagnie aérienne a compilé la masse de tous les bagages enregistrés sur une année et a constaté que la masse d'un bagage est donnée en kg par une variable aléatoire X d'espérance 22 et d'écart-type 1,4.

1) Sur un avion de 500 passagers supposés indépendants, on appelle X_i la masse du bagage du passager i et M la variable aléatoire donnant la moyenne des masses des bagages des 500 passagers.
   Minorer $p\left(\mathrm{M} \in \left]21,5;22,5\right[\right)$.
2) Si la masse totale des bagages est inférieure ou égale à 10,5 tonnes, alors l'avion embarque des bagages d'un autre vol et si la masse totale des bagages est supérieure ou égale à 11,5 tonnes, alors une partie des bagages est envoyée sur un autre vol.
   Majorer la probabilité (à 10^{-4} près) que cet avion contienne des bagages d'un autre vol ou ne contienne pas tous les bagages de ses passagers.

Exercice 2A.1

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire au hasard successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1) *Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges tirées.*

a) *Donner la loi de probabilité de X.*

X peut prendre les valeurs 0, 1 et 2.

En réalisant un arbre de probabilité, on obtient :

$$p(X=2)=p(R_1)\times p_{R_1}(R_2)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

$$p(X=1)=p(R_1)\times p_{R_1}(V_2)+p(V_1)\times p_{V_1}(R_2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$$

$$p(X=0)=p(V_1)\times p_{V_1}(V_2)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$$

X	0	1	2	Total
$p(X)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{25}{25}$

b) *Déterminer l'espérance et la variance de X.*

$$E(X)=0\times\frac{4}{25}+1\times\frac{12}{25}+2\times\frac{9}{25}=\frac{12+18}{25}=\frac{30}{25}=\frac{6}{5}=1,2$$

$$V(X)=0^2\times\frac{4}{25}+1^2\times\frac{12}{25}+2^2\times\frac{9}{25}-1,2^2=\frac{12+36}{25}-1,44=\frac{12+36}{25}-1,44=0,48$$

2) *On répète n fois l'expérience.*

X_k *donne le nombre de boules tirées lors de la k-ième expérience* $(1\leq k\leq n)$.

On pose $M_n=\dfrac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$.

a) *Que représente la variable aléatoire* M_n *?*

Déterminer son espérance et sa variance.

M_n est la variable aléatoire moyenne de tous les lancers, c'est-à-dire la moyenne du nombre de boules rouges obtenues sur les *n* expériences réalisées.

Dans un échantillon, de taille *n*, nous avons :

$$E(M_n)=E(X)=1,2 \quad \text{et} \quad V(M_n)=\frac{V(X)}{n}=\frac{1,2}{n}.$$

b) *Justifier que pour tout réel* $\delta>0$ *:* $p(|M_n-1,2|\geq\delta)\leq\dfrac{0,48}{n\delta^2}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, nous avons, pour tout réel $\delta>0$:

$$p(|M_n-E(M_n)|\geq\delta)\leq\frac{V(M_n)}{\delta^2}$$

Soit : $\quad p(|M_n-1,2|\geq\delta)\leq\dfrac{0,48}{n\delta^2}$.

c) *Ecrire l'inégalité précédente dans le cas où* $\delta=0,1$ *et* $n=100$. *Interpréter cette inégalité.*

$$p(|M_n-1,2|\geq 0,1)\leq\frac{0,48}{100\times 0,1^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad p(|M_n-1,2|\geq 0,1)\leq 0,48$$

Pour $n\geq 100$, M_n donne une valeur de 1,2 à une précision de 0,1 avec un risque de 0,48.

La probabilité pour que l'écart entre la moyenne des n expériences et l'espérance soit supérieur à 10 % est inférieure à 48 %.

d) *On prend $\delta = 0,01$. Déterminer une valeur de n telle que $p(|M_n - 1,2| \geq 0,01) \leq 0,48$.*

Donner une interprétation de cette valeur.

En prenant $\delta = 0,01$, on obtient :

$$p(|M_n - 1,2| \geq 0,01) \leq \frac{0,48}{n \times 0,01^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad p(|M_n - 1,2| \geq 0,01) \leq \frac{4800}{n}$$

On cherche n tel que :

$$p(|M_n - 1,2| \geq 0,01) \leq 0,48$$

Par identification, on obtient :

$$\frac{4800}{n} = 0,48 \quad \Leftrightarrow \quad 4800 = 0,48n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4800}{0,48} = n \quad \Leftrightarrow \quad n = 100\,000.$$

Pour $n \geq 100\,000$, M_n donne une valeur de 1,2 à une précision de 0,01 avec un risque de 0,48.

Il faudrait effectuer au moins 100 000 expériences pour que la probabilité que l'écart entre la moyenne des n expériences et l'espérance soit supérieur à 1 % devienne inférieure à 48 %.

Exercice 2A.2

On tire au hasard un nombre dans l'ensemble $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

1) *Soit X la variable aléatoire qui donne ce nombre.*

a) *Déterminer la loi de X.*

Tous les tirages sont équiprobables, la loi de probabilité de X est :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(X)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

b) *Vérifier que X a pour espérance 4,5 et pour variance 8,25.*

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{10} + \ldots + 9 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}(0+1+2+\ldots+9) = \frac{45}{10} = 4,5$$

$$V(X) = 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{1}{10} + \ldots + 9^2 \times \frac{1}{10} - 4,5^2 = \frac{1}{10}\left(0^2 + 1^2 + \ldots + 9^2\right) - 20,25 = 8,25$$

2) *On répète n fois l'expérience.*

Les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n donnent les n premiers nombres obtenus et on pose :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

a) *Interpréter la valeur prise par la variable aléatoire M_n.*

M_n est la variable aléatoire moyenne de tous les lancers, c'est-à-dire la moyenne des nombres obtenus sur les n expériences réalisées.

b) *Justifier que $p(|M_n - 4,5| \geq 0,5) \leq \frac{33}{n}$.*

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, nous avons, pour tout réel $\delta > 0$:

$$p(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}$$

soit : $p\left(\left|M_n-4,5\right|\geq\delta\right)\leq\dfrac{8,25}{n\delta^2}$.

En prenant $\delta=0,5$, on obtient

$$p\left(\left|M_n-4,5\right|\geq 0,5\right)\leq\frac{8,25}{n\times 0,5^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad p\left(\left|M_n-4,5\right|\geq 0,5\right)\leq\frac{33}{n}$$

c) *En déduire que* $p\left(\left|M_n-4,5\right|<0,5\right)\geq 1-\dfrac{33}{n}$.

$$p\left(\left|M_n-4,5\right|\geq 0,5\right)=1-p\left(\left|M_n-4,5\right|<0,5\right)$$

Donc : $1-p\left(\left|M_n-4,5\right|<0,5\right)\leq\dfrac{33}{n}$

$$\Leftrightarrow\quad -p\left(\left|M_n-4,5\right|<0,5\right)\leq\frac{33}{n}-1$$

$$\Leftrightarrow\quad p\left(\left|M_n-4,5\right|<0,5\right)\geq-\frac{33}{n}+1$$

3) a) *Trouver une valeur de n telle que* $p\left(\left|M_n-4,5\right|<0,5\right)\geq 0,99$.

On doit résoudre :

$$1-\frac{33}{n}=0,99\quad\Leftrightarrow\quad-\frac{33}{n}=0,99-1\quad\Leftrightarrow\quad-\frac{33}{n}=-0,01\quad\Leftrightarrow\quad 33=0,01n\quad\Leftrightarrow\quad\frac{33}{0,01}=n$$

Ainsi : $n=3300$

b) *Interpréter la valeur trouvée.*

A partir de 3300 expériences, il y a au moins 99 % de chances que la moyenne des lancers soit dans l'intervalle $]4;5[$.

c) Pour $n\geq 3300$, M_n donne une valeur de 4,5 à une précision de 0,5 avec un risque de 0,99.

Exercice 2A.3

Dans un avion, un passager est autorisé à mettre en soute un bagage de 23 kg ou moins, sans pénalité.
Une compagnie aérienne a compilé la masse de tous les bagages enregistrés sur une année et a constaté que la masse d'un bagage est donnée en kg par une variable aléatoire X d'espérance 22 et d'écart-type 1,4.

1) *Sur un avion de 500 passagers supposés indépendants, on appelle* X_i *la masse du bagage du passager i et M la variable aléatoire donnant la moyenne des masses des bagages des 500 passagers.*
Minorer $p\left(\mathrm{M}\in\left]21,5;22,5\right[\right)$.

L'espérance de la v.a. M est :

$$E(\mathrm{M})=E(\mathrm{X})=22.$$

La variance de la v.a. M est :

$$V(\mathrm{M})=1,4^2=1,96.$$

D'après l'inégalité de concentration :

$$p\left(\left|\mathrm{M}-E(\mathrm{M})\right|\geq 0,5\right)\leq\frac{V(\mathrm{M})}{500\times 0,5^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad p\left(\left|\mathrm{M}-22\right|\geq 0,5\right)\leq\frac{1,96}{125}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-p\left(\left|\mathrm{M}-22\right|\geq 0,5\right)\geq 1-\frac{1,96}{125}$$

$$\Leftrightarrow \quad p\left(\left|\mathrm{M}-22\right|< 0,5\right)\geq 0,984$$

2) *Si la masse totale des bagages est inférieure ou égale à 10,5 tonnes, alors l'avion embarque des bagages d'un autre vol et si la masse totale des bagages est supérieure ou égale à 11,5 tonnes, alors une partie des bagages est envoyée sur un autre vol.*

Majorer la probabilité (à 10^{-4} *près) que cet avion contienne des bagages d'un autre vol ou ne contienne pas tous les bagages de ses passagers.*

Soit S la masse totale des bagages des 500 passagers :

$$\mathrm{S}=500\mathrm{M}.$$

On cherche à majorer la probabilité :

$$\begin{aligned} p\left(\left(\mathrm{S}\leq 10500\right)\cup\left(\mathrm{S}\geq 11500\right)\right) &= p\left(\left(\frac{\mathrm{S}}{500}\leq\frac{10500}{500}\right)\cup\left(\frac{\mathrm{S}}{500}\geq\frac{11500}{500}\right)\right)\\ &= p\left(\left(\mathrm{M}\leq 21\right)\cup\left(\mathrm{M}\geq 23\right)\right)\\ &= p\left(\left|\mathrm{M}-22\right|\geq 1\right)\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de concentration :

$$p\left(\left|\mathrm{M}-E\left(\mathrm{M}\right)\right|\geq 1\right)\leq\frac{V\left(\mathrm{M}\right)}{n\times 1^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad p\left(\left|\mathrm{M}-22\right|\geq 1\right)\leq\frac{1,96}{500}$$

$$\Leftrightarrow \quad p\left(\left|\mathrm{M}-22\right|\geq 1\right)\leq 0,0039$$

Cette probabilité étant très faible, il y a peu de chances pour qu'il y ait des problèmes de bagages.