Loi des grands nombres

Exercice 3A.1

Soit X une variable aléatoire positive d'espérance *x*.

Déterminer *x* tel que $p(X \geq 2) \leq \frac{1}{3}$.

Exercice 3A.2

Soit X une variable aléatoire positive telle que $E(X) = a$ avec $a > 2$.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $p(X \geq a^n) \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 3A.3

Un économiste affirme la chose suivante :
« Moins de 6,2 % de la population mondiale adulte est millionnaire ».
On donne les données suivantes :

- La richesse mondiale est de 278,1 billions de dollars (1 billion représente 1 000 milliards) ;
- La population monfiale adulte s'élève à 4,5 milliards de personnes.

Peut-on penser que l'économiste a raison ? Justifier.

Exercice 3A.4

1. Calculer $p(|X - E(X)| \geq a)$, avec $a = 3$ et $V(X) = 2{,}5$.
2. Calculer $p(|X - E(X)| < a)$, avec $a = 11$ et $V(X) = 7$.
3. Calculer $p\left((X - E(X))^2 \geq a\right)$, avec $a = 16$ et $V(X) = 4$.

Exercice 3A.5

On lance *n* fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
On note M_n le nombre moyen de 5 obtenus.

A l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer la valeur minimale de *n* pour respecter les conditions de l'exercice.

1. $a = 0{,}02$ et $p(|M_n - E(X)| \geq a) \leq 0{,}05$.
2. Vérifier le résultat avec un programme en langage python.

Exercice 3A.6

On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note X la variable aléatoire qui, à un tirage donné, associe 1 si la boule tirée est rouge et 0 sinon, et M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille *n* de X.

1) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$ puis écrire l'inégalité de concentration relative à M_n.
2) A partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Exercice 3A.7

On lance 3 600 fois une pièce de monnaie non truquée.
Soit X la variable aléatoire qui associe à cette expérience le nombre de Pile obtenus.

1) Ecrire l'inégalité de Biénaymé-Tchebychev relative à la variable X.
2) Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions de Pile soit strictement compris entre 1 600 et 2 000.

Exercice 3A.8

Annie distribue des prospectus à la sortie du métro.
Les variables aléatoires X_i donnant le nombre de prospectus distribués le i-ième jour sont indépendantes et de même loi d'espérance 250 et de variance 100.
Au bout de combien de jours peut-elle être sûre, au risque de 5 %, d'avoir distribué en moyenne entre 245 et 255 prospectus par jour ?

Exercice 3A.9

On lance une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir Pile est 0,6.

1) On lance n fois cette pièce et on appelle X_i la variable aléatoire donnant le nombre de Pile obtenus au i-ième lancer.
   a) Justifier que X_i suit une loi de Bernoulli.
   b) Déterminer $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
2) On cherche à déterminer le nombre de lancers à partir duquel on est sûr au seuil de 95 % qu'il y a plus de Pile que de Face.
   a) On appelle M_n la variable aléatoire donnant la moyenne des n premiers X_i.
   Quel est le plus grand intervalle I de la forme $]0,6-\delta;0,6+\delta[$ tel que $M_n \in \mathrm{I}$ implique qu'il y ait eu plus de Pile que de Face ?
   b) A l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer à partir de combien de lancers on peut être sûr, au seuil de 95 %, que $M_n \in \mathrm{I}$. On appellera n_0 ce nombre de lancers.
   c) En utilisant la loi binomiale, calculer la probabilité qu'il y ait plus de Pile que de Face quand on lance n_0 fois cette pièce. Commenter.

Exercice 3A.10

On considère une usine fabriquant des montres à aiguilles sans trotteuse. Les deux aiguilles sont fabriquées indépendamment.
Les variables aléatoires donnant la masse de chaque aiguille en grammes sont :

- X pour les heures d'espérance 3 et d'écart-type 0,15 ;
- Y pour les minutes d'espérance 2 et d'écart-type 0,1.

1) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z donnant la masse totale des deux aiguilles.
2) Pour que la montre soit bien équilibrée, la masse des deux auguilles doit être comprise entre 4,4 g et 5,6 g.
   Que peut-on dire de la probabilité que ce soit le cas ?

Exercice 3A.1

Soit X une variable aléatoire positive d'espérance x. Déterminer x tel que $p(\mathrm{X} \geq 2) \leq \frac{1}{3}$.

D'après l'inégalité de Markov, pour tout réel a strictement positif, on a :

$$p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Soit : $p(X \geq 2) \leq \frac{x}{2}$

On obtient : $\frac{x}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Exercice 3A.2

Soit X une variable aléatoire positive telle que $E(\mathrm{X}) = a$ *avec* $a > 2$.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $p(\mathrm{X} \geq a^n) \leq \frac{1}{2}$.

D'après l'inégalité de Markov, pour tout entier $n \geq 2$:

$$p(\mathrm{X} \geq a^n) \leq \frac{E(\mathrm{X})}{a^n} \Leftrightarrow p(\mathrm{X} \geq a^n) \leq \frac{1}{a^{n-1}}$$

Or $n \geq 2 \Leftrightarrow n-1 \geq 1$.

Or $a > 2 \Leftrightarrow a^{n-1} > 2^{n-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^{n-1}} < \frac{1}{2}$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$:

$$p(\mathrm{X} \geq a^n) \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 3A.3

Un économiste affirme la chose suivante :
« Moins de 6,2 % de la population mondiale adulte est millionnaire ».
On donne les données suivantes :

- *La richesse mondiale est de 278,1 billions de dollars (1 billion représente 1 000 milliards) ;*
- *La population mondiale adulte s'élève à 4,5 milliards de personnes.*

Peut-on penser que l'économiste a raison ? Justifier.

Soit X la variable aléatoire qui …

$$E(\mathrm{X}) = \frac{278\,100\,000\,000}{4\,500\,000\,000} = 61{,}8\ \$$$

D'après l'inégalité de Markov, pour tout réel a strictement positif, on a :

$$p(X \geq 1\,000\,000) \leq \frac{E(X)}{1\,000\,000}$$

Soit : $p(X \geq 1\,000\,000) \leq \frac{61{,}8}{1\,000\,000}$

$$\Leftrightarrow p(X \geq 1\,000\,000) \leq 0{,}000\,0618$$

Exercice 4

1. *Calculer* $p\left(\left|X-E(X)\right|\geq a\right)$, *avec* $a=3$ *et* $V(X)=2,5$.

   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel positif t :
   $$p\left(\left|X-E(X)\right|\geq t\right)\leq\frac{V(X)}{t^2}$$
   $$\Leftrightarrow\quad p\left(\left|X-E(X)\right|\geq 3\right)\leq\frac{2,5}{3^2}$$
   $$\Leftrightarrow\quad p\left(\left|X-E(X)\right|\geq 3\right)\leq\frac{5}{18}$$

2. *Calculer* $p\left(\left|X-E(X)\right|< a\right)$, *avec* $a=11$ *et* $V(X)=7$.

   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel positif t :
   $$p\left(\left|X-E(X)\right|\geq t\right)\leq\frac{V(X)}{t^2}\quad\Leftrightarrow\quad 1-p\left(\left|X-E(X)\right|\geq t\right)\geq 1-\frac{V(X)}{t^2}$$
   Soit : $$p\left(\left|X-E(X)\right|< t\right)\geq 1-\frac{V(X)}{t^2}.$$
   Ainsi : $$p\left(\left|X-E(X)\right|< 11\right)\geq 1-\frac{7}{11^2}$$
   $$\Leftrightarrow\quad p\left(\left|X-E(X)\right|< 11\right)\geq\frac{114}{121}$$

3. *Calculer* $p\left(\left(X-E(X)\right)^2\geq a\right)$, *avec* $a=16$ *et* $V(X)=4$.

   On remarque que :
   $$p\left(\left(X-E(X)\right)^2\geq a\right)=p\left[\left(\left(X-E(X)\right)\geq\sqrt{a}\right)\cup\left(-\left(X-E(X)\right)\leq-\sqrt{a}\right)\right]$$
   $$=p\left(\left|X-E(X)\right|\geq\sqrt{a}\right)$$
   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
   $$p\left(\left|X-E(X)\right|\geq\sqrt{a}\right)\leq\frac{V(X)}{\left(\sqrt{a}\right)^2}$$
   $$\Leftrightarrow\quad p\left(\left|X-E(X)\right|\geq\sqrt{16}\right)\leq\frac{4}{\left(\sqrt{16}\right)^2}$$
   $$\Leftrightarrow\quad p\left(\left|X-E(X)\right|\geq 4\right)\leq\frac{1}{4}$$

Exercice 3A.5

On lance n fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
On note M_n *le nombre moyen de 5 obtenus.*

A l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer la valeur minimale de n pour respecter les conditions de l'exercice.

1. $a=0,02$ *et* $p\left(\left|M_n-E(X)\right|\geq a\right)\leq 0,05$.
2. *Vérifier le résultat avec un programme en langage python.*

1. Chaque lancer s'effectue dans des conditions identiques et indépendantes, menant à deux issues selon l'obtention d'un 5. La variable aléatoire X prenant la valeur 1 en cas d'obtention d'un 5 et 0 sinon, suit une loi de Bernoulli. Son espérance et sa variance sont :

$$E(\mathrm{X})=\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad V(\mathrm{X})=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}.$$

Les variables aléatoires X_i suivent toutes la loi de X lors du *i*-ième lancer.

Ainsi :

$$E(M_n)=E(\mathrm{X})=\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad V(M_n)=\frac{V(\mathrm{X})}{n}=\frac{5}{36n}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$p\left(\left|M_n-E(M_n)\right|\geq 0,02\right)\leq\frac{V(M_n)}{0,02^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad p\left(\left|M_n-E(\mathrm{X})\right|\geq 0,02\right)\leq\frac{V(\mathrm{X})}{0,0004n}$$

$$\Leftrightarrow \quad p\left(\left|M_n-E(\mathrm{X})\right|\geq 0,02\right)\leq\frac{3125}{9n}$$

La relation $\frac{3125}{9n}=0,05$ donne :

$$n=\frac{3125}{9\times 0,05}=\frac{62\,500}{9}\simeq 6944,4$$

Soit à partir de 6945 lancers.

2. *Programme en langage python.*

```
from random import *
from math import *
S = 0
nb5 = 0
E = 1/6
n = 0
p = 1
nb_écart_sup_002 = 0
while p > 0.05:
    if randint(1,6) == 5:
        nb5 += 1
    n += 1
    if abs(nb5/n - E) >= 0.02:
        nb_écart_sup_002 += 1
    p = nb_écart_sup_002 / n
print(n)
```

→on obtient : 3260 puis 2220 ……………… à revoir

Exercice 3A.6

On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note X la variable aléatoire qui, à un tirage donné, associe 1 si la boule tirée est rouge et 0 sinon, et M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X.

1) *Déterminer $E(\mathrm{X})$ et $V(\mathrm{X})$ puis écrire l'inégalité de concentration relative à M_n.*

La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli :

$$E(\mathrm{X})=\frac{2}{5} \quad \text{et} \quad V(\mathrm{X})=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}.$$

La variable aléatoire moyenne de ces tirages vérifie :

$$E(M_n)=E(X)=\frac{2}{5} \text{ et } V(M_n)=\frac{V(X)}{n}=\frac{6}{25n}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel positif a :

$$p(|M_n-E(M_n)|\geq a)\leq\frac{V(M_n)}{a^2} \Leftrightarrow p(|M_n-0,4|\geq a)\leq\frac{6}{25na^2}.$$

2) *A partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre 0,35 et 0,45 ?*

Ainsi :

$$p(|M_n-0,4|\geq 0,5)\leq\frac{6}{25n\times 0,5^2}$$

$$\Leftrightarrow -p(|M_n-0,4|\geq 0,5)\geq -\frac{6}{25n\times 0,25}$$

$$\Leftrightarrow 1-p(|M_n-0,4|\geq 0,5)\geq 1-\frac{24}{25n}$$

$$\Leftrightarrow p(|M_n-0,4|<0,5)\geq 1-\frac{24}{25n}$$

On désire que :

$$1-\frac{24}{25n}>0,95 \Leftrightarrow -\frac{24}{25n}>0,95-1 \Leftrightarrow -\frac{24}{25n}>-0,05 \Leftrightarrow \frac{24}{25n}<0,05$$

$$\Leftrightarrow 24<0,05\times 25n \Leftrightarrow \frac{24}{0,05\times 25}<n \Leftrightarrow n>19,2$$

A partir du 20$^{\text{ème}}$ lancer, à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre 0,35 et 0,45

Exercice 3A.7

On lance 3 600 fois une pièce de monnaie non truquée.
Soit X la variable aléatoire qui associe à cette expérience le nombre de Pile obtenus.

1) *Ecrire l'inégalité de Biénaymé-Tchebychev relative à la variable X.*

Dans cette succession de 3600 évènements identiques et indépendants menant à deux issues, la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n=3600$ et $p=\frac{1}{2}$.

Son espérance est : $E(X)=3600\times\frac{1}{2}=1800$ et sa variance est : $V(X)=3600\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=900$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel positif a :

$$p(|X-E(X)|\geq a)\leq\frac{V(X)}{a^2} \Leftrightarrow p(|X-1800|\geq a)\leq\frac{900}{a^2}.$$

2) *Minorer la probabilité que le nombre d'appartitions de Pile soit strictement compris entre 1 600 et 2 000.*

$$p(|X-1800|\geq 200)\leq\frac{900}{200^2}$$

$$\Leftrightarrow -p(|X-1800|\geq 200)\geq -\frac{900}{40\,000}$$

$$\Leftrightarrow 1-p(|X-1800|\geq 200)\geq 1-\frac{9}{400}$$

$$\Leftrightarrow \quad p\left(|X-1800|<200\right)\geq\frac{391}{400}$$

La probabilité que le nombre d'appartitions de Pile soit strictement compris entre 1 600 et 2 000 est supérieure ou égale à 0,9775

Exercice 8

Annie distribue des prospectus à la sortie du métro.
Les variables aléatoires X_i donnant le nombre de prospectus distribués le i-ième jour sont indépendantes et de même loi d'espérance 250 et de variance 100.
Au bout de combien de jours peut-elle être sûre, au risque de 5 %, d'avoir distribué en moyenne entre 245 et 255 prospectus par jour ?

La variable aléatoire M_n de toutes les variables X_i vérifie :

$$E\left(M_n\right)=E\left(X\right)=250 \ \text{ et } \ V\left(M_n\right)=\frac{V\left(X\right)}{n}=\frac{100}{n}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel positif a :

$$p\left(\left|M_n-E\left(M_n\right)\right|\geq a\right)\leq\frac{V\left(M_n\right)}{a^2} \quad\Leftrightarrow\quad p\left(|M_n-250|\geq 5\right)\leq\frac{100}{n\times 5^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -p\left(|M_n-250|\geq 5\right)\geq-\frac{4}{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-p\left(|M_n-250|\geq 5\right)\geq 1-\frac{4}{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad p\left(|M_n-250|<5\right)\geq 1-\frac{4}{n}$$

On désire que $\Leftrightarrow \ p\left(|M_n-250|<5\right)\geq 0,95$ soit :

$$1-\frac{4}{n}=0,95 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{4}{n}=0,95-1 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{4}{n}=-0,05 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{n}=0,05 \quad\Leftrightarrow\quad 4=0,05n$$

$$\Leftrightarrow \quad n=\frac{4}{0,05}=80$$

Il faudra au moins 80 jours pour qu'Annie ait distribué en moyenne entre 245 et 255 prospectus par jour avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Exercice 9

On lance une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir Pile est 0,6.

1) *On lance n fois cette pièce et on appelle X_i la variable aléatoire donnant le nombre de Pile obtenus au i-ième lancer.*

a) *Justifier que X_i suit une loi de Bernoulli.*

Au i-ème lancer, on obtient soit 1 Pile, soit 0 Pile. La variable aléatoire X_i suit bien une loi de Bernoulli.

b) *Déterminer $E\left(X_i\right)$ et $V\left(X_i\right)$.*

$$E\left(X_i\right)=0,6 \ \text{ et } \ V\left(X_i\right)=0,6\times 0,4=0,24.$$

2) *On cherche à déterminer le nombre de lancers à partir duquel on est sûr au seuil de 95 % qu'il y a plus de Pile que de Face.*

a) *On appelle M_n la variable aléatoire donnant la moyenne des n premiers X_i.*

Quel est le plus grand intervalle I de la forme $]0,6-\delta;0,6+\delta[$ *tel que* $M_n \in \mathrm{I}$ *implique qu'il y ait eu plus de Pile que de Face ?*

S'il y a plus de Pile que de Face, alors $M_n > \frac{1}{2}$.

Ainsi on doit avoir :

$$0,6-\delta > 0,5 \iff 0,6-0,5 > \delta \iff 0,1 > \delta$$

On obtient :

$$I =]0,5;0,7[$$

b) *A l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer à partir de combien de lancers on peut être sûr, au seuil de 95 %, que* $M_n \in \mathrm{I}$. *On appellera* n_0 *ce nombre de lancers.*

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$p\left(\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| \geq 0,1\right) \leq \frac{V\left(M_n\right)}{0,1^2}$$

$$\iff p\left(\left|M_n - E\left(\mathrm{X}_i\right)\right| \geq 0,1\right) \leq \frac{V\left(\mathrm{X}_i\right)}{n_0 \times 0,01}$$

$$\iff 1 - p\left(\left|M_n - 0,6\right| \geq 0,1\right) \geq 1 - \frac{100 \times 0,24}{n_0}$$

$$\iff p\left(\left|M_n - 0,6\right| < 0,1\right) \geq 1 - \frac{24}{n_0}$$

Pour avoir un seuil de 95 %, on doit avoir :

$$1 - \frac{24}{n_0} = 0,95$$

$$\iff -\frac{24}{n_0} = 0,95 - 1$$

$$\iff \frac{24}{n_0} = 0,05$$

$$\iff 24 = 0,05 n_0$$

$$\iff n_0 = \frac{24}{0,05} = 480$$

A partir de 480 lancers on peut être sûr, au seuil de 95 %, que $M_n \in \mathrm{I}$.

c) *En utilisant la loi binomiale, calculer la probabilité qu'il y ait plus de Pile que de Face quand on lance* n_0 *fois cette pièce. Commenter.*

Les lancers sont identiques et indépendants, menant à deux issues, la variable aléatoire X comptant le nombre de Pile suit la loi binomiale $B(480;0,6)$.

$$p(\mathrm{X} > 240) = 1 - p(\mathrm{X} \leq 240) \simeq 0,99999.$$

Pour 480 lancers, la probabilité d'obtenir plus de Pile que de face est quasi certaine.
La relation de Bienaymé-Tchebychev permet d'obtenir une valeur liée à un seuil, ce que ne permet pas la loi binomiale.

Exercice 10

On considère une usine fabriquant des montres à aiguilles sans trotteuse. Les deux aiguilles sont fabriquées indépendamment.
Les variables aléatoires donnant la masse de chaque aiguille en grammes sont :

- *X pour les heures d'espérance 3 et d'écart-type 0,15 ;*
- *Y pour les minutes d'espérance 2 et d'écart-type 0,1.*

1) *Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z donnant la masse totale des deux aiguilles.*

Par définition : $Z = X + Y$, or les aiguilles sont fabriquées indépendamment, donc :

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = 3 + 2 = 5$$

$$V(Z) = V(X) + V(Y) = 0{,}15 + 0{,}10 = 0{,}25$$

2) *Pour que la montre soit bien équilibrée, la masse des deux auguilles doit être comprise entre 4,4 g et 5,6 g. Que peut-on dire de la probabilité que ce soit le cas ?*

On s'intéresse à la probabilité : $p(|Z-5| \leq 0{,}6)$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel positif *a* :

$$p(|Z - E(Z)| \geq a) \leq \frac{V(Z)}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad p(|Z-5| \geq 0{,}6) \leq \frac{0{,}25}{0{,}6^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - p(|Z-5| \geq 0{,}6) \geq 1 - \frac{0{,}25}{0{,}36}$$

$$\Leftrightarrow \quad p(|Z-5| < 0{,}6) \geq \frac{11}{36}$$