Proposition de démonstration en français
de la constante de Kaprekar pour les nombres à quatre chiffres

prendre un nombre non nul à 4 chiffres
utiliser ses chiffres pour constituer le plus grand nombre possible
utiliser ses chiffres pour constituer le plus petit nombre possible
effectuer la différence entre ces deux nombres
recommencer l'opération jusqu'à ce que la situation se stabilise

Quel est le nombre de stabilisation, appelé nombre de Kaprekar ?

On choisit un nombre composé de quatre chiffres $abcd$ $(a \neq 0)$ tel que :

1) On construit le plus grand nombre G à quatre chiffres avec les chiffres a, b, c et d ;
2) On construit le plus petit nombre P à quatre chiffres avec les chiffres a, b, c et d ;
3) La différence entre les nombres P et G obtenus est égale au nombre initial $abcd$.

Le problème se résume en :

$efgh - hgfe = abcd$, avec : $e, f, g, h \in \{a, b, c, d\}$ tels que : $e \geq f \geq g \geq h$.

D'après les chiffres des unités :

soit : $h = d + e$, ce qui est exclu car h est le plus petit des quatre chiffres : $h < e$

donc : $10 + h = d + e$

et il y a une retenue

D'après les chiffres des dizaines :

soit : $g = f + c + 1$, ce qui est exclu car $g < f$

donc : $10 + g = f + c + 1$

et il y a une retenue

D'après les chiffres des centaines :

soit : $f = g + b + 1$

soit : $10 + f = g + b + 1$ et il y a une retenue

$\rightarrow$mais $f \geq g$: $b = 9 + f - g$ implique $b = 9$

D'après les chiffres des milliers :

soit : $e = h + a$

soit : $e = h + a + 1$

On obtient deux configurations :

$$\text{soit} \begin{cases} 10 + h = d + e \\ 10 + g = f + c + 1 \\ f = g + b + 1 \\ e = h + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 + h = d + h + a \\ 10 + g = g + b + 1 + c + 1 \\ f = g + b + 1 \\ e = h + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = a + d \\ 10 = b + c + 2 \\ f = g + b + 1 \\ e = h + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = a + d \\ b + c = 8 \\ f = g + b + 1 \\ e = h + a \end{cases}$$

$$\text{soit} \begin{cases} 10 + h = d + e \\ 10 + g = f + c + 1 \\ 10 + f = g + b + 1 \\ e = h + a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 + h = d + h + a + 1 \\ 10 + g = g + b - 9 + c + 1 \\ 9 + f = g + b \\ e = h + a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = d + a + 1 \\ 10 = b + c - 8 \\ 9 + f = g + b \\ e = h + a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = d + a \\ b + c = 18 \\ 9 + f = g + b \\ e = h + a + 1 \end{cases}$$

Première configuration : $\begin{cases} 10 = a + d \\ b + c = 8 \\ b = f - g - 1 \\ a = e - h \end{cases}$

$a = e - h$: si a est petit, les valeurs extrêmes sont très proches

Si $a = 1$: $\begin{cases} 10 = 1 + d \\ b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 9 \\ b + c = 8 \end{cases}$ → le rapport $a = e - h = 1$ n'est pas respecté

Si $a = 2$: $\begin{cases} 10 = 2 + d \\ b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 8 \\ b + c = 8 \end{cases}$ → le rapport $e - h = 2$ n'est pas respecté

Si $a = 3$: $\begin{cases} 10 = 3 + d \\ b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 7 \\ b + c = 8 \end{cases}$ → le rapport $e - h = 3$ n'est pas respecté

Si $a = 4$: $\begin{cases} 10 = 4 + d \\ b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6 \\ b + c = 8 \end{cases}$ → $a = e - h = 4$, on doit avoir :

b ou $c \in \{0;2;8\}$

→ si $b = 0$ alors $c = 8$: le rapport $a = e - h = 4$ n'est pas respecté
→ si $c = 0$ alors $b = 8$: le rapport $a = e - h = 4$ n'est pas respecté
→ si $b = 2$ alors $c = 6$: le nombre 4266 donne G = 6642 et P = 2466
→ $b = f - g - 1 = 6 - 4 - 1 = 1$ n'est pas respecté
→ si $c = 2$ alors $b = 6$: le nombre 4626 donne G = 6642 et P = 2466
→ $b = f - g - 1 = 6 - 4 - 1 = 1$ n'est pas respecté

Si $a = 5$: $\begin{cases} 10 = 5 + d \\ b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 5 \\ b + c = 8 \end{cases}$ → $a = e - h = 5$, on doit avoir :

Soit : b ou $c \in \{0\}$

→ si $b = 0$ alors $c = 8$: le rapport $a = e - h = 5$ n'est pas respecté
→ si $c = 0$ alors $b = 8$: le rapport $a = e - h = 5$ n'est pas respecté

Soit : $\begin{cases} |b - c| = 5 \\ b + c = 8 \end{cases}$ → $\begin{cases} b - c = 5 \\ b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 13 \\ b + c = 8 \end{cases}$: pas de solution

→ $\begin{cases} c - b = 5 \\ b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 13 \\ b + c = 8 \end{cases}$: pas de solution

Si $a = 6$: $\begin{cases} 10 = 6 + d \\ b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ b + c = 8 \end{cases}$ → $a = e - h = 6$, on doit avoir :

Soit : b ou $c \in \{0\}$

→ si $b = 0$ alors $c = 8$: le rapport $a = e - h = 6$ n'est pas respecté
→ si $c = 0$ alors $b = 8$: le rapport $a = e - h = 6$ n'est pas respecté

Soit : $\begin{cases} |b - c| = 6 \\ b + c = 8 \end{cases}$ → $\begin{cases} b - c = 6 \\ b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 14 \\ b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 1 \end{cases}$

le nombre 6714 donne G = 7641 et P = 1467
→ $b = f - g - 1 = 6 - 4 - 1 = 1$ n'est pas respecté

→ $\begin{cases} c - b = 6 \\ b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 14 \\ b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 7 \\ b = 1 \end{cases}$

le nombre 6174 donne G = 7641 et P = 1467
→ $b = f - g - 1 = 6 - 4 - 1 = 1$ est respecté

Si $a=7$: $\begin{cases}10=7+d\\ b+c=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d=3\\ b+c=8\end{cases}$ → $a=e-h=7$, on doit avoir :

Soit : b ou $c\in\{0\}$

→si $b=0$ alors $c=8$: le rapport $a=e-h=7$ n'est pas respecté

→si $c=0$ alors $b=8$: le rapport $a=e-h=7$ n'est pas respecté

Soit : $\begin{cases}|b-c|=7\\ b+c=8\end{cases}$ → $\begin{cases}b-c=7\\ b+c=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2b=15\\ b+c=8\end{cases}$: pas de solution

→ $\begin{cases}c-b=7\\ b+c=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2c=15\\ b+c=8\end{cases}$: pas de solution

Si $a=8$: $\begin{cases}10=8+d\\ b+c=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d=2\\ b+c=8\end{cases}$ → $a=e-h=8$, on doit avoir :

Soit : b ou $c\in\{0\}$

→si $b=0$ alors $c=8$: le rapport $a=e-h=8$ est respecté

le nombre 8082 donne G = 8820 et P = 0288

→$b=f-g-1=8-2-1=5$ n'est pas respecté

→si $c=0$ alors $b=8$: le rapport $a=e-h=8$ est respecté

le nombre 8802 donne G = 8820 et P = 0288

→$b=f-g-1=8-2-1=5$ n'est pas respecté

Soit : $\begin{cases}|b-c|=8\\ b+c=8\end{cases}$ → $\begin{cases}b-c=8\\ b+c=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2b=16\\ b+c=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=8\\ c=0\end{cases}$: nous retrouvons le nb 8802

→ $\begin{cases}c-b=8\\ b+c=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2c=16\\ b+c=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=8\\ b=0\end{cases}$: nous retrouvons le nb 8082.

Si $a=9$: $\begin{cases}10=9+d\\ b+c=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d=1\\ b+c=8\end{cases}$ → $a=e-h=9$, on doit avoir :

On doit avoir : b ou $c\in\{0\}$

→si $b=0$ alors $c=8$: le rapport $a=e-h=9$ est respecté

le nombre 9081 donne G = 9810 et P = 0189

→$b=f-g-1=8-1-1=6$ n'est pas respecté

→si $c=0$ alors $b=8$: le rapport $a=e-h=9$ est respecté

→$b=f-g-1=8-1-1=6$ n'est pas respecté

La seule solution est : 6174.

Seconde configuration : $\begin{cases}9=d+a\\ b+c=18\\ 9+f=g+b\\ e=h+a+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9=d+a\\ b=c=9\\ b=9+f-g\\ a=e-h-1\end{cases}$

Or $a=e-h$: si a est petit, la valeurs extrêmes sont très proches

Si $a=1$: $\begin{cases}9=d+1\\ b=c=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d=8\\ b=c=9\end{cases}$ →le rapport $a=e-h-1=1$ n'est pas respecté

Si $a=2$: $\begin{cases}9=d+2\\ b=c=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d=7\\ b=c=9\end{cases}$ →le rapport $a=e-h-1=2$ n'est pas respecté

Si $a=3$: $\begin{cases} 9=d+3 \\ b=c=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=6 \\ b=c=9 \end{cases}$ →le rapport $a=e-h-1=3$ n'est pas respecté

Si $a=4$: $\begin{cases} 9=d+4 \\ b=c=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=5 \\ b=c=9 \end{cases}$ →le rapport $a=e-h-1=4$ est respecté

le nombre 4995 donne G = 9954 et P = 4599

→ $b=9+f-g=9+9-5$ n'est pas respecté

Si $a=5$: $\begin{cases} 9=d+5 \\ b=c=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=4 \\ b=c=9 \end{cases}$ →le rapport $a=e-h-1=4$ n'est pas respecté

Si $a=6$: $\begin{cases} 9=d+6 \\ b=c=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=3 \\ b=c=9 \end{cases}$ →le rapport $a=e-h-1=9-3-1=5$ n'est pas respecté

Si $a=7$: $\begin{cases} 9=d+7 \\ b=c=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ b=c=9 \end{cases}$ →le rapport $a=e-h-1=9-2-1=6$ n'est pas respecté

Si $a=8$: $\begin{cases} 9=d+8 \\ b=c=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=1 \\ b=c=9 \end{cases}$ →le rapport $a=e-h-1=9-1-1=7$ n'est pas respecté

Si $a=9$: $\begin{cases} 9=d+9 \\ b=c=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ b=c=9 \end{cases}$ →le rapport $a=e-h-1=9-0-1=8$ n'est pas respecté

La seule solution à quatre chiffres est : 6174

7641 – 1467 = 6174

Florent Quet