Pourquoi $\dfrac{1}{998\,001} = 0{,}000\ 001\ 002\ 003\ 004\ 005\ 006\ ...$?

$$\frac{1}{998\,001} = \frac{1}{999^2} = \frac{1}{(1000-1)^2} = \frac{1}{1000^2} \times \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{1000}\right)^2}$$

Pour le second quotient, on utilise le développement :

Si $|z|<1$, alors : $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{d}{dz}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}$

En prenant $z = \dfrac{1}{10^3}$, on obtient :

$$\frac{1}{998\,001} = \frac{1}{999^2} = \frac{1}{(1000-1)^2} = \frac{1}{10^6} \times \left(1 + \frac{2}{10^3} + \frac{3}{10^6} + \frac{4}{10^9} + \frac{5}{10^{12}} + ...\right)$$

$$= 0{,}000\ 001\ 002\ 003\ 004\ 005\ 006\ ...$$

F. Quet

Un classique du net

La Merci MONTPELLIER