Constante de Kaprekar pour les nombres à trois chiffres

prendre un nombre non nul à 3 chiffres
utiliser ses chiffres pour constituer le plus grand nombre possible
utiliser ses chiffres pour constituer le plus petit nombre possible
effectuer la différence entre ces deux nombres
recommencer l'opération jusqu'à ce que la situation se stabilise

Quel est le nombre de stabilisation, appelé nombre de Kaprekar ?

Trouver un nombre composé de trois chiffres abc $(a \neq 0)$ tel que :

1) On construit le plus grand nombre G à trois chiffres avec les chiffres a, b et c ;
2) On construit le plus petit nombre P à trois chiffres avec les chiffres a, b et c ;
3) La différence entre les nombres P et G obtenus est égale au nombre initial abc.

Le problème se résume en :

$def - fed = abc$, avec : $d, e, f \in \{a, b, c\}$ tels que : $d \geq e \geq f$.

D'après les chiffres des unités :

soit : $f = c + d$, ce qui est exclu car f est le plus petit des trois chiffres : $d \geq f$

donc : $10 + f = c + d$ et il y a une retenue

D'après les chiffres des dizaines :

soit : $b = e - e - 1$, ce qui est exclu car b est positif

donc : $b = 10 + e - e - 1 = 9$ et il y a une retenue

D'après les chiffres des centaines :

soit : $d = a + f + 1$

On obtient : $\begin{cases} 10 + f = c + d \\ b = 9 \\ d = a + f + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 + f = c + a + f + 1 \\ b = 9 \\ d = a + f + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = c + a \\ b = 9 \\ d = a + f + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 - c \\ b = 9 \\ d = a + f + 1 \end{cases}$

Si $a = 1$, alors : $\begin{cases} c = 9 - a = 8 \\ b = 9 \\ d = 1 + f + 1 = f + 2 \end{cases}$ →on obtient : 198 , d'où 981 et 189 et $d \neq f + 2$

Si $a = 2$, alors : $\begin{cases} c = 9 - a = 7 \\ b = 9 \\ d = 2 + f + 1 = f + 3 \end{cases}$ →on obtient : 297 , d'où 972 et 279 et $d \neq f + 3$

Si $a = 3$, alors : $\begin{cases} c = 9 - a = 6 \\ b = 9 \\ d = 3 + f + 1 = f + 4 \end{cases}$ →on obtient : 396 , d'où 963 et 369 et $d \neq f + 4$

Si $a = 4$, alors : $\begin{cases} c = 9 - 4 = 5 \\ b = 9 \\ d = 4 + f + 1 = f + 5 \end{cases}$ →on obtient : 495 , d'où 954 et 459 et $d = f + 5$

→le nombre 495 fonctionne

Si $a = 5$, alors : $\begin{cases} c = 9 - a = 4 \\ b = 9 \\ d = 5 + f + 1 = f + 6 \end{cases}$ →on obtient : 594 , d'où 954 et 459 et $d \neq f + 6$

Si $a=6$, alors : $\begin{cases} c=9-a=3 \\ b=9 \\ d=6+f+1=f+7 \end{cases}$ →on obtient : 693 , d'où 963 et 369 et $d \neq f+7$

Si $a=7$, alors : $\begin{cases} c=9-a=2 \\ b=9 \\ d=7+f+1=f+8 \end{cases}$ →on obtient : 792 , d'où 972 et 279 et $d \neq f+8$

Si $a=8$, alors : $\begin{cases} c=9-a=1 \\ b=9 \\ d=8+f+1=f+9 \end{cases}$ →on obtient : 891 , d'où 981 et 189 et $d \neq f+9$

Si $a=9$, alors : $\begin{cases} c=9-a=0 \\ b=9 \\ d=9+f+1=f+10 \end{cases}$ →le nombre *d* ne peut être défini.

La seule solution à trois chiffres est : 495

954 – 459 = 495

Exemple :

329 → max 932 et min 239

$932-239=693$

693 → max 963 et min 369

$963-369=594$

594 → max 954 et min 459

$954-459=495$

495 → max 954 et min 459

$954-459=495$

495 est la constante de Kaprekar

Florent Quet

Autre rédaction :

1) Nous allons étudier les différentes possibilités pour obtenir le nombre G en sachant que $a \neq 0$:

$$\mathrm{G} \in \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$$

2) Pour chaque possibilité de G, on obtient les possibilités suivantes associées pour le nombre P :

$$\mathrm{P} \in \{cba, bca, cab, acb, bac, abc\}$$

3) On doit avoir :

$$\mathrm{G} - \mathrm{P} = abc$$

Soit :

$$\begin{cases} abc - cba = abc \\ acb - bca = abc \\ bac - cab = abc \\ bca - acb = abc \\ cab - bac = abc \\ cba - abc = abc \end{cases}$$

→on peut exclure la première équation car $cba \neq 0$.

Etude de $acb - bca = abc$:

d'après le chiffre des centaines, cela impliquerait d'avoir : $b = 0$, d'où : $ac0 - 0ca = a0c$

on en déduit : $\begin{cases} a + c = 10 \\ c0 = ca \end{cases}$ soit $\begin{cases} c = 10 - a \\ a = 0 \end{cases}$

→or par hypothèse : $a \neq 0$: cette hypothèse est invalidée

Etude de $bac - cab = abc$:

d'après le chiffre des unités, cela impliquerait d'avoir : $b = 0$, d'où : $0ac - ca0 = a0c$

mais le plus grand nombre G ne peut commencer par un zéro sinon tous ses chiffres seraient nuls

cette hypothèse est invalidée

Etude de $bca - acb = abc$:

d'après le chiffre des centaines : $b = 2a$ ou $b = 2a + 1$

d'après le chiffre des unités : $a = b + c$ ou $10 + a = b + c$

si $a = b + c$, d'après le chiffre des dizaines, cela impliquerait $b = 0$, non valable.

si $10 + a = b + c$, d'après le chiffre des dizaines, cela impliquerait $b = 9$

on ne pourrait avoir $b = 2a$

l'égalité $b = 2a + 1$ donnerait : $a = 4$

→l'égalité $10 + a = b + c$ donnerait : $10 + a = b + c = 10 + a - b = 10 + 4 - 9 = 5$

On obtient le nombre 495

Etude de $cab - bac = abc$:

d'après le chiffre des centaines : $c = a + b$ ou $c = a + b + 1$

d'après le chiffre des dizaines : $b = 0$ ou $b = 9$ or le nombre $\mathrm{P} = bac$ ne peut commencer par 9

d'après le chiffre des unités : $b = 2c$ ou $10 + b = 2c$: dans les deux cas, b est pair, donc $b \neq 9$

si $b = 2c$, avec $b = 0$, on doit avoir : $c = \frac{1}{2}b = 0$:

$\mathrm{G} = cab$ ne peut être le plus grand nombre : cette hypothèse est invalidée

si $10 + b = 2c$, avec $b = 0$, on doit avoir : : $2c = 10 \Leftrightarrow c = 5$

mais le chiffre des dizaines dans ce cas devrait être $b = 9$, ce qui est exclu.

cette hypothèse est invalidée

Etude de $cba - abc = abc$:

d'après le chiffre des centaines : $c = 2a$ ou $c = 2a + 1$

d'après le chiffre des dizaines : $b = 0$ ou $b = 9$: cela impliquerait le nombre 999

d'après le chiffre des unités : $a = 2c$ ou $10 + a = 2c$: dans les deux cas, a est pair

si $a = 2c$, alors $a > c$ et le nombre $\mathrm{G} = cba$ est invalide.

si $10 + a = 2c$, alors $b = 9$, ce qui est exclu.

Le seul nombre valide est :

495