**Exercices d’algèbre et de logique (Merci à lycee-oiselet.fr)**

## Exercice 1 :

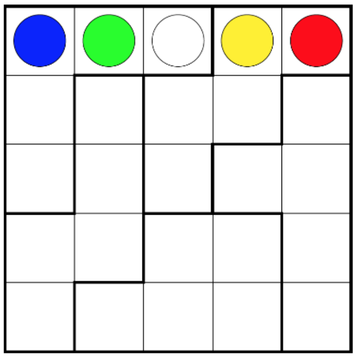
Dans la bande ci-dessous, il y a 11 cases. Dans la première case, on écrit le chiffre 7 et dans la neuvième, le chiffre 6.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | | | | | | | | 6 | | |

La somme des 3 chiffres placés dans des cases consécutives doit toujours valoir 21.
Quel chiffre doit-on placer dans la deuxième case ?

## Exercice 2 :

Remplissez les cases avec les pions de cinq couleurs différentes de telle façon que chaque couleur apparaisse une et une seule fois dans chaque ligne, chaque colonne et chaque région.



## Exercice 3 :

Je suis un nombre composé de deux chiffres.
Quand on additionne mes deux chiffres, on trouve ma moitié.
Quand on permute mes deux chiffres, on trouve le carré de ma moitié.
Qui suis-je ?

## Exercice 4 :

Un éleveur de chevaux a de quoi nourrir ses bêtes durant 30 jours.
Il vend 20 bêtes et il a maintenant de quoi les nourrir pendant 40 jours.
Combien avait-il de bêtes au départ ?

## Exercice 5 :

Les entiers 22 et 123 font partie des entiers ayant la particularité suivante : dans leur écriture dans le système décimal, la somme des chiffres est égale au produit des chiffres.
Pouvez-vous trouver le nombre d'entiers s'écrivant avec 5 chiffres (dans le système décimal) qui possèdent aussi cette propriété ?

## Exercice 6 :

Dans une classe, il y a 22 élèves.
Parmi eux, se trouvent Youssef et Céline.
Parmi les 20 autres élèves, 13 sont amis avec Youssef, et 14 sont amis avec Céline.
Combien d’amis communs ont au minimum Youssef et Céline ?

## Exercice 7 :

Quand le mois d’octobre comporte exactement 4 mercredis et 4 dimanches, quel jour de la semaine est le 1er octobre ?

## Exercice 8 :

Deux athlètes disputent, au cours d’un match international, une course de fond. L’un accomplit tout le parcours à une vitesse de 360 mètres par minute.
L’autre part très vite et couvre la première moitié de la distance à la vitesse de 400 mètres par minute, puis il faiblit et court la deuxième moitié à la vitesse de 320 mètres à la minute.
Sachant que la différence des temps est de 20,9 secondes, de quelle épreuve s’agit-il ?

## Exercice 9 :

Quels sont les nombres à quatre chiffres $n$ tels que la somme de $n$ et de ses quatre chiffres soit égale à 2019 ?
*Exemple* : 1998 ne convient pas car $1998+1+9+9+8=2025$.

## Exercice 10 :

Soit $n = 9 + 99 + 999 + ... + 99...9$, où le dernier nombre ajouté est constitué de 999 chiffres 9.
Combien de fois le chiffre 1 apparaît-il dans *n* ?

## Exercice 11 :

On calcule le produit suivant où le numérateur est le produit des nombres de 10 à 2010, pris de 4 en 4 et le dénominateur le produit de tous les nombres impairs de 1 à 1001 :

$$N = \frac{10 \times 14 \times 18 \times ... \times 2010}{1 \times 3 \times 5 \times ... \times 1001}$$

Ecrire le résultat sous la forme $2^n \times p$ où *p* est un nombre entier naturel impair.

## Exercice 12 :

Montrer que le nombre A est un entier naturel : $A = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} - \sqrt{18}$

## Exercice 13 :

Matthieu plante une fleur magique qui se dédouble toutes les secondes.
En une minute, tout son jardin en est couvert, c'est magnifique !
Mais s'il avait planté 4 fleurs au départ, combien aurait-il fallu de temps pour recouvrir ce même jardin ?

## Exercice 14 :

- Ecrire un nombre de 3 chiffres, lui coller le même nombre (par ex. 257 donne 257257) ;
- Le diviser par 7 puis par 11 puis par 13.

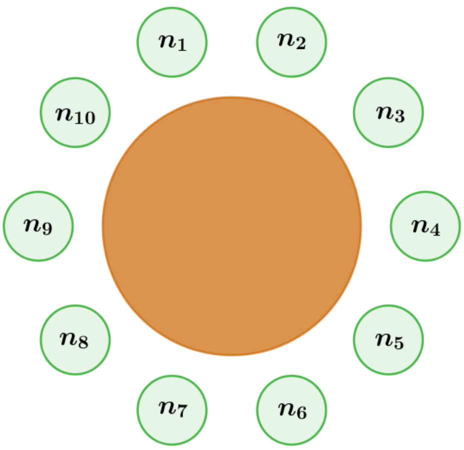
Quelle conjecture peut être émise ?
Que se passe-t-il ?

## Exercice 15 :

Dans un QCM de 20 questions, si l'on répond correctement, on marque 7 points, si l'on ne répond pas, on ne marque ni ne perd aucun point, si l'on répond de manière erronée, on perd 2 points.
Clément a obtenu la note de 87/140.
A combien de questions a-t-il répondu ?

## Exercice 16 :

Dix personnes sont assises autour d'une table.
Chacune pense à un nombre et le dit à ses deux voisins.
Puis chaque personne dit à voix haute la moyenne des nombres de ses deux voisins.
Si les nombres de 1 à 10, dans cet ordre, ont été annoncés, à quel nombre la personne qui a dit 6 a-t-elle pensé ?



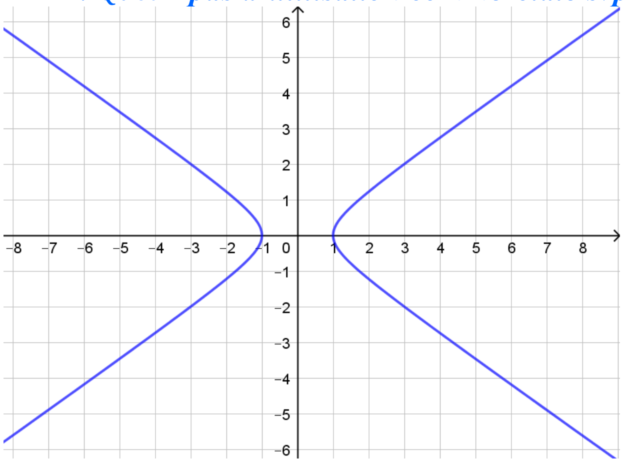

## Exercice 17 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = 1$

## Exercice 18 :

Mathias calcule le carré d'un nombre à deux chiffres, puis le carré du nombre obtenu en permutant le chiffre des unités et celui des dizaines du nombre de départ, qui sont deux chiffres différents.
Surprise ! Les deux carrés s'écrivent avec les mêmes chiffres écrits dans un ordre différent !
Ecrire un programme permettant de trouver ces nombres.

## Exercice 19 :




Ci –contre est représenté dans un repère l'ensemble des points dont le couple $(x;y)$ de coordonnées vérifie la relation $x^2-2y^2=1$.

On s'intéresse plus particulièrement aux points de cette courbe dont les coordonnées sont des entiers comme par exemple le point dont le couple de coordonnées est $(1;0)$

1. Donner quatre autres couples d'entiers $(x;y)$ tels que $x^2-2y^2=1$.
2. Soit $a$ et $b$ des entiers naturels. On pose $\mathrm{A}=a+2b$ et $\mathrm{B}=a+b$.
   Exprimer $\mathrm{A}^2-2\mathrm{B}^2$ en fonction de $a^2-2b^2$.
   Donner un nouveau couple d'entiers $(x;y)$ solution de l'équation $x^2-2y^2=1$ tel que $x>10$.
3. Rédiger un algorithme affichant le premier couple d'entiers $(x;y)$ solution de l'équation $x^2-2y^2=1$ et tel que $x>2018$.
   Quel est le couple obtenu ?

**CORRIGE – Notre Dame de La Merci – M. Quet**

**Exercice 1 :**

*Dans la bande ci-dessous, il y a 11 cases. Dans la première case, on écrit le chiffre 7 et dans la neuvième, le chiffre 6.*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | | | | | | | | 6 | | |

*La somme des 3 chiffres placés dans des cases consécutives doit toujours valoir 21.*
*Quel chiffre doit-on placer dans la deuxième case ?*

La somme de trois nombres consécutifs doit faire 21 :

Les deuxième et troisième cases valent 14

→la quatrième case vaut 7

→la septième case vaut 7

On en déduit que la huitième case vaut 8

→la sixème case est un 6

→la cinquième case est un 8

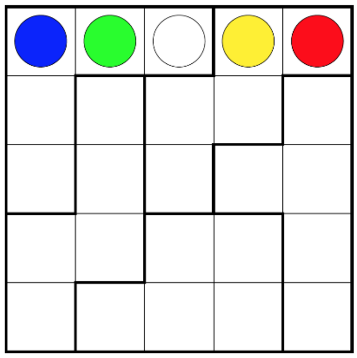
→la troisième case est un 6

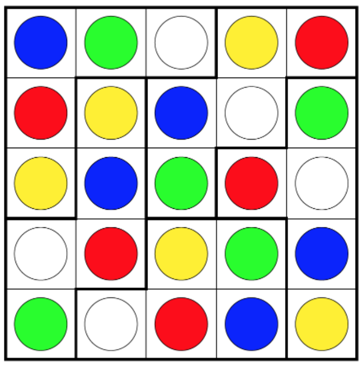
→la deuxième case est un 8

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 8 | 6 | 7 | 8 | 6 | 7 | 8 | 6 | | |

**Exercice 2 :**

*Remplissez les cases avec les pions de cinq couleurs différentes de telle façon que chaque couleur apparaisse une et une seule fois dans chaque ligne, chaque colonne et chaque région.*





**Exercice 3 :**

*Je suis un nombre composé de deux chiffres.*
*Quand on additionne mes deux chiffres, on trouve ma moitié.*
*Quand on permute mes deux chiffres, on trouve le carré de ma moitié.*
*Qui suis-je ?*

Notons $a$ le chiffre des dizaines et $b$ le chiffre des unités.
Le nombre N cherché est donc $\mathrm{N} = 10a + b$.

- quand on additionne mes deux chiffres, on trouve ma moitié :

$$a + b = \frac{\mathrm{N}}{2} \Leftrightarrow a + b = \frac{10a + b}{2} \Leftrightarrow 2a + 2b = 10a + b \Leftrightarrow b = 8a$$

- quand on permute mes deux chiffres, le nombre devient *ba*, soit $10b+a$, égal au carré de ma moitié :

$$10b+a=\left(\frac{10a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 10b+a=\frac{100a^2+20ab+b^2}{4} \Leftrightarrow 4(10b+a)=100a^2+20ab+b^2$$

$$\Leftrightarrow 40b+4a=100a^2+20ab+b^2$$

Or : $b=8a$, on obtient :

$$40\times 8a+4a=100a^2+20a\times 8a+(8a)^2$$

$$\Leftrightarrow 324a=100a^2+160a^2+64a^2$$

$$\Leftrightarrow 324a^2-324a=0$$

$$\Leftrightarrow 324a(a-1)=0$$

→soit $a=0$, d'où $b=8a=0$, d'où : $\mathrm{N}=10a+b=0$

→soit $a=1$, d'où $b=8a=8$, d'où : $\mathrm{N}=10a+b=18$

Le nombre 0 n'ayant pas deux chiffres, le problème possède une seule solution : $\mathrm{N}=18$.

## Exercice 4 :

*Un éleveur de chevaux a de quoi nourrir ses bêtes durant 30 jours.*
*Il vend 20 bêtes et il a maintenant de quoi les nourrir pendant 40 jours.*
*Combien avait-il de bêtes au départ ?*

Posons $a$ la quantité de nourriture pour un cheval, par jour.
Posons $x$ le nombre de chevaux au départ.
Après la vente, il reste donc $x-20$ chevaux.

Pour les $x$ chevaux du départ, il fallait une quantité de nourriture égale à $x\times a\times 30$ pour les nourrir les 30 jours.
Pour les $x-20$ chevaux restant, il faut une quantité de nourriture égale à $(x-20)\times a\times 40$ pour les nourrir les 40 jours.
Ces deux quantités de nourriture sont identiques donc il faut résoudre :

$$x\times a\times 30=(x-20)\times a\times 40$$

$$\Leftrightarrow 30x=40(x-20)$$

$$\Leftrightarrow 30x=40x-800$$

$$\Leftrightarrow 800=10x$$

$$\Leftrightarrow x=80$$

L'éleveur avait donc 80 chevaux au départ.

## Exercice 5 :

*Les entiers 22 et 123 font partie des entiers ayant la particularité suivante : dans leur écriture dans le système décimal, la somme des chiffres est égale au produit des chiffres.*
*Pouvez-vous trouver le nombre d'entiers s'écrivant avec 5 chiffres (dans le système décimal) qui possèdent aussi cette propriété ?*

On peut remarquer que le chiffre 0 ne doit pas figurer dans l'écriture et que l'on peut limiter la recherche aux entiers s'écrivant :

$$a\times 10^4+b\times 10^3+c\times 10^2+d\times 10+e$$

tels que les chiffres *a*, *b*, *c*, *d* et *e* vérifient $a\le b\le c\le d\le e$ (il suffira alors de permuter).
Dans ce cas on a :

$$a+b+c+d+e\le 5e$$

Or : $a+b+c+d+e=a\times b\times c\times d\times e$

d'où : $a\times b\times c\times d\times e\leq 5e \iff abcd\leq 5$

Les solutions possibles pour $(a,b,c,d)$ sont :

$(1,1,1,1)$ , $(1,1,1,2)$ , $(1,1,1,3)$ , $(1,1,1,4)$ , $(1,1,1,5)$ , $(1,1,2,2)$.

- Si $(a,b,c,d)=(1,1,1,1)$, alors :
  $a+b+c+d+e=e+4$ et $a\times b\times c\times d\times e=e$
- Si $(a,b,c,d)=(1,1,1,2)$, alors :
  $a+b+c+d+e=e+5$ et $a\times b\times c\times d\times e=2e$ → la seule possibilité est : $e=5$
- Si $(a,b,c,d)=(1,1,1,3)$, alors :
  $a+b+c+d+e=e+6$ et $a\times b\times c\times d\times e=3e$ → la seule possibilité est : $e=3$
- Si $(a,b,c,d)=(1,1,1,4)$, alors :
  $a+b+c+d+e=e+7$ et $a\times b\times c\times d\times e=4e$ → aucune possibilité
- Si $(a,b,c,d)=(1,1,1,5)$, alors :
  $a+b+c+d+e=e+8$ et $a\times b\times c\times d\times e=5e$ → aucune possibilité
- Si $(a,b,c,d)=(1,1,2,2)$, alors :
  $a+b+c+d+e=e+6$ et $a\times b\times c\times d\times e=4e$ → la seule possibilité est : $e=2$

Les entiers cherchés sont :

11125, 11133 et 11222.

Les solutions s'obtiennent en permutant les chiffres de 11125, 11133 et 11222.

- Pour 11125, le nombre de permutations est :
  $$\frac{5!}{3!}=5\times 4=20$$
- Pour 11133 et 11222, le nombre de permutations est :
  $$\frac{5!}{3!\times 2!}=\frac{5\times 4}{2}=10$$

Il y a donc au total 40 entiers.

**Exercice 6 :**

*Dans une classe, il y a 22 élèves.*
*Parmi eux, se trouvent Youssef et Céline.*
*Parmi les 20 autres élèves, 13 sont amis avec Youssef, et 14 sont amis avec Céline.*
*Combien d'amis communs ont au minimum Youssef et Céline ?*

Notons $n$ le nombre d'amis communs à Youssef et Céline.

Il y a donc $13-n$ élèves qui sont amis avec Youssef, mais pas avec Céline, et $14-n$ élèves qui sont amis avec Céline mais pas avec Youssef.

Lorsqu'on ajoute :

- le nombre d'élèves amis avec Youssef seulement : $13-n$
- le nombre d'élèves amis avec Céline seulement : $14-n$
- le nombre d'élèves amis communs de Youssef et Céline : $n$

on obtient au maximum 20 (n'oublions pas que des élèves de la classe pourraient n'être amis ni avec Youssef, ni avec Céline). Ceci se traduit par :

$$13-n+14-n+n\leq 20$$
$$\iff 27-n\leq 20$$
$$\iff 27-20\leq n$$
$$\iff n\geq 7$$

Youssef et Céline ont au minimum 7 amis communs.

## Exercice 7 :

*Quand le mois d'octobre comporte exactement 4 mercredis et 4 dimanches, quel jour de la semaine est le 1er octobre ?*

Le mois d'octobre compte 31 jours.
Lors des 28 derniers jours d'octobre, du 4 octobre au 31 octobre, chaque jour de la semaine apparaît exactement 4 fois.
Et chacun des trois premiers jours apparaît donc exactement 5 fois pendant le mois.
De plus, ces trois jours sont consécutifs et ni mercredi ni dimanche ne peut figurer parmi eux.

→un lundi 1er octobre ferait apparaître 5 mercredis

→un dimanche 1er octobre ferait apparaître 5 dimanches

La seule possibilité est que ces trois premiers jours soient jeudi/vendredi/samedi.
Le 1er octobre est donc un jeudi.

## Exercice 8 :

*Deux athlètes disputent, au cours d'un match international, une course de fond. L'un accomplit tout le parcours à une vitesse de 360 mètres par minute.*
*L'autre part très vite et couvre la première moitié de la distance à la vitesse de 400 mètres par minute, puis il faiblit et court la deuxième moitié à la vitesse de 320 mètres à la minute.*
*Sachant que la différence des temps est de 20,9 secondes, de quelle épreuve s'agit-il ?*

On note $L$ la longueur du parcours.
Le temps mis par le premier est :

$$t_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{L}{360} \text{ en minutes.}$$

Le temps mis par le deuxième est :

$$t_2 = \frac{\frac{L}{2}}{400} + \frac{\frac{L}{2}}{320} = \frac{L}{800} + \frac{L}{640} = \frac{L \times 4}{800 \times 4} + \frac{L \times 5}{640 \times 5} = \frac{4L}{3200} + \frac{5L}{3200} = \frac{9L}{3200} \text{ en minutes.}$$

On remarque que :

$$\frac{9}{3200} < \frac{1}{360}$$

donc : $t_2 < t_1$

$$\Leftrightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{20,9}{60}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9L}{3200} - \frac{L}{360} = \frac{20,9}{60}$$

Sachant que :

$$3200 = 2^5 \times 2^2 \times 5^2 = 2^7 \times 5^2$$

$$360 = 2^2 \times 3^2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Ainsi :

$$\frac{9L}{3200} - \frac{L}{360} = \frac{9L \times 9}{3200 \times 9} - \frac{L \times 80}{360 \times 80} = \frac{81L}{28800} - \frac{80L}{28800} = \frac{L}{28800}$$

On doit résoudre :

$$\frac{L}{28800} = \frac{20,9}{60}$$

$$\Leftrightarrow \quad 60L = 28800 \times 20,9$$

$$\Leftrightarrow \quad L = \frac{28800 \times 20,9}{60} = 480 \times 20,9 = 10032$$

L'épreuve courue était un 10 000 mètres.

**Exercice 9 :**

*Quels sont les nombres à quatre chiffres n tels que la somme de n et de ses quatre chiffres soit égale à 2019 ?*
*Exemple : 1998 ne convient pas car* $1998+1+9+9+8=2025$.

Notons *a*, *b*, *c* et *d* les chiffres qui composent *n*, tels que :

$$n=a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d=1000a+100b+10c+d$$

On cherche donc à déterminer tous les quadruplets de chiffres $(a,b,c,d)$ vérifiant :

$$1000a+100b+10c+d+a+b+c+d=2019$$
$$\Leftrightarrow\ 1001a+101b+11c+2d=2019$$

Comme *n* est un nombre à quatre chiffres, $a\neq0$.

La relation $1001a+101b+11c+2d=2019$ implique :

$$a=1 \text{ ou } a=2.$$

- si $a=1$ :

  $101b+11c+2d=2019-1001=1018$

  or : $c\leq9$ et $d\leq9$ donc :

  $$11c+2d\leq117$$
  $$\Leftrightarrow\ 101b+11c+2d\leq101b+117$$
  $$\Leftrightarrow\ 1018\leq101b+117$$
  $$\Leftrightarrow\ 1018-117\leq101b$$
  $$\Leftrightarrow\ \frac{901}{101}\leq b$$

  Donc $b=9$

  Ainsi :

  $$11c+2d=1018-101\times9$$
  $$\Leftrightarrow\ 11c+2d=109$$

  or : $d\leq9$ donc :

  $$2d\leq18$$
  $$\Leftrightarrow\ 11c+2d\leq11c+18$$
  $$\Leftrightarrow\ 109\leq11c+18$$
  $$\Leftrightarrow\ 109-18\leq11c$$
  $$\Leftrightarrow\ \frac{91}{11}\leq c$$

  Donc : $c=9$

  On obtient :

  $$11\times9+2d=109$$
  $$\Leftrightarrow\ 2d=109-99$$
  $$\Leftrightarrow\ d=\frac{10}{2}=5$$

  On obtient le nombre 1995 : $1995+1+9+9+5=2019$.

- si $a=2$ :

  $101b+11c+2d=2019-1001\times2=17$

  On doit avoir : $b=0$. Ainsi :

  $$11c+2d=17$$

  Si $c=0$ : $2d=17\ \Leftrightarrow\ d=\frac{17}{2}$ : cela ne convient pas

  Donc : $c=1$.

  Ainsi :

  $$2d=17-11$$

$$\Leftrightarrow \quad d = \frac{6}{2} = 3$$

On obtient le nombre 2013 convient : $2013+2+0+1+3=2019$.

Les seuls nombres solutions sont 1995 et 2013.

## Exercice 10 :

*Soit* $n=9+99+999+...+99...9$, *où le dernier nombre ajouté est constitué de 999 chiffres 9.*
*Combien de fois le chiffre 1 apparaît-il dans n ?*

Soit la somme :

$$n=9+99+999+9999+...+9999...999$$

Le dernier nombre de cette somme contenant 999 chiffres 9.
Cette somme comporte donc 999 termes et peut s'écrire :

$$n=(10-1)+\left(10^2-1\right)+\left(10^3-1\right)+\left(10^4-1\right)+...+\left(10^{99}-1\right)$$

En changeant l'ordre des termes, on peut écrire :

$$n=10+10^2+10^3+10^4+...+10^{99}-999$$

soit encore :

$$n=11111...10-999$$

où le premier nombre de cette différence est constitué de 999 chiffres 1 et d'un chiffre 0.
On peut écrire $n$ sous la forme :

$$n=11111...1110000+1110-999$$

où le premier nombre de cette somme comporte 996 chiffres 1 et 4 chiffres 0.
Or : $1110-999=111$
Donc $n$ peut s'écrire :

$$n=11111...1110111$$

Ainsi $n$ est constitué de 996 chiffres 1, d'un chiffre 0, puis de 3 chiffres 1.
**L'écriture de *n* comporte 999 chiffres 1.**

## Exercice 11 :

*On calcule le produit suivant où le numérateur est le produit des nombres de 10 à 2010, pris de 4 en 4 et le dénominateur le produit de tous les nombres impairs de 1 à 1001 :*

$$N=\frac{10\times14\times18\times...\times2010}{1\times3\times5\times...\times1001}$$

*Ecrire le résultat sous la forme* $2^n\times p$ *où p est un nombre entier naturel impair.*

On peut réécrire $N$ :

$$N=\frac{10\times14\times18\times...\times2010}{1\times3\times5\times...\times1001}=\frac{(4\times2+2)\times(4\times3+2)\times(4\times4+2)\times...\times(4\times502+2)}{(2\times0+1)\times(2\times1+1)\times(2\times2+1)\times...\times(2\times500+1)}$$

Soit : $$N=\frac{\prod_{k=2}^{502}4k+2}{\prod_{k=0}^{500}2k+1}=\frac{2^{502-2+1}\prod_{k=2}^{502}2k+1}{\prod_{k=0}^{500}2k+1}=\frac{2^{501}\prod_{k=2}^{502}2k+1}{\prod_{k=0}^{500}2k+1}=\frac{2^{501}\times1003\times1005\prod_{k=2}^{500}2k+1}{1\times3\times\prod_{k=2}^{500}2k+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad N=\frac{2^{501}\times1003\times1005}{3}2^{501}\times336005$$

## Exercice 12 :

*Montrer que le nombre A est un entier naturel :*

$$A=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}-\sqrt{18}$$

La démonstration s'appuie sur l'identité remarquable :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Ainsi :

$$9+4\sqrt{2}=8+4\sqrt{2}+1=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\times2\sqrt{2}\times1+1^2=\left(2\sqrt{2}+1\right)^2$$

D'où : $A=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}}}-\sqrt{18}$

$$=\sqrt{13+30\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}}-\sqrt{18}$$

$$=\sqrt{13+30\sqrt{3+2\sqrt{2}}}-\sqrt{18}$$

Or : $3+2\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\times\sqrt{2}\times1+1^2=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$

D'où : $A=\sqrt{13+30\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}-\sqrt{18}$

$$=\sqrt{13+30\left(\sqrt{2}+1\right)}-\sqrt{18}$$

$$=\sqrt{13+30\sqrt{2}+30}-\sqrt{18}$$

$$=\sqrt{43+30\sqrt{2}}-3\sqrt{2}$$

Or : $43+30\sqrt{2}$ n'est pas intuitif à factoriser, procédons ainsi :

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)^2=a^2+2ab\sqrt{2}+2b^2$$

Par identification :

$$2ab=30 \Leftrightarrow ab=15 : a,b\in\{3,5\}$$

En testant $\left(5+3\sqrt{2}\right)^2$ et $\left(3+5\sqrt{2}\right)^2$, on obtient :

$$43+30\sqrt{2}=\left(5+3\sqrt{2}\right)^2$$

D'où : $A=\sqrt{\left(5+3\sqrt{2}\right)^2}-3\sqrt{2}$

$$=5+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}$$

$$=5$$

Ainsi A est un entier : $A=5$.

## Exercice 13 :

*Matthieu plante une fleur magique qui se dédouble toutes les secondes.*
*En une minute, tout son jardin en est couvert, c'est magnifique !*
*Mais s'il avait planté 4 fleurs au départ, combien aurait-il fallu de temps pour recouvrir ce même jardin ?*

La surface occupée par les fleurs double toutes les secondes, multiplier par 4 la surface de départ revient à mettre le jardin dans l'état où il serait 2s après la plantation de la première fleur.
On gagne donc 2s sur le temps mis pour recouvrir le jardin avec une seule fleur.
Le jardin sera couvert en 58s.

## Exercice 14 :

- *Ecrire un nombre de 3 chiffres, lui coller le même nombre (par ex. 257 donne 257257) ;*
- *Le diviser par 7 puis par 11 puis par 13.*

*Quelle conjecture peut être émise ?*
*Que se passe-t-il ?*

Tout d'abord $257\,257 = 7\times 11\times 13\times 257$, ce qui prouve que ce nombre est divisible par 7, 11 et 13.

D'une façon générale, soit *a*, *b*, *c* trois chiffres quelconques pris dans $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

On considère le nombre $abc$, on lui colle $abc$, on a donc le nombre $\mathrm{N} = abc\,abc$ :

$$\begin{aligned}\mathrm{N} = abc\,abc &= 100\,000a + 10\,000b + 1000c + 100a + 10b + c\\ &= 1000(100a + 10b + c) + 100a + 10b + c\\ &= 1001(100a + 10b + c)\\ &= 7\times 11\times 13\times(100a + 10b + c)\end{aligned}$$

Tout nombre $abc\,abc$ est donc divisible par 7, 11 et 13.

## Exercice 15 :

*Dans un QCM de 20 questions, si l'on répond correctement, on marque 7 points, si l'on ne répond pas, on ne marque ni ne perd aucun point, si l'on répond de manière erronée, on perd 2 points.*
*Clément a obtenu la note de 87/140.*
*A combien de questions a-t-il répondu ?*

Posons $x$ le nombre de bonnes réponses de Clément et $y$ le nombre de ses mauvaises réponses.

On a alors : $\begin{cases} 0 \le x \le 20 \\ 0 \le y \le 20 \\ x + y \le 20 \end{cases}$.

D'autre part, d'après l'énoncé :

$$7x - 2y = 87$$

Quelques décompositions du nombre 87 sont utiles :

$$87 = 7\times 13 - 4 = 7\times 14 - 11 = \ldots$$

Le nombre de réponses exactes doit être impair. Ainsi :

$$87 = 7\times 13 - 2\times 2 = 7\times 15 - 2\times 9 = 7\times 17 - 2\times 12 = 7\times 19 - 2\times 19$$

Les quatre couples $(x, y)$ sont :

$$\{(13;2),(15;9),(17;12),(19;19)\}$$

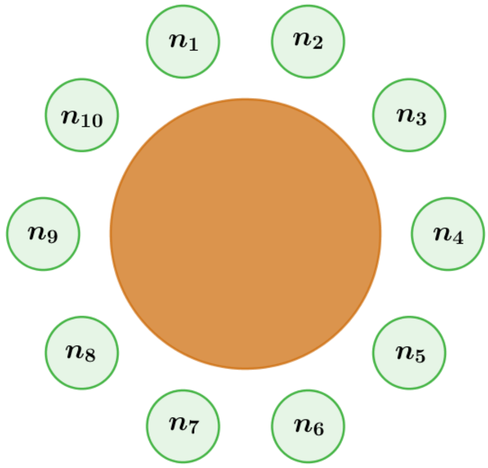
Le seul couple vérifiant : $x + y \le 20$ est :

$$(13;2)$$

Clément a eu 13 bonnes réponses et 2 erreurs. Il a donc répondu à 15 questions sur les 20 proposées.

**Exercice 16 :**

*Dix personnes sont assises autour d'une table.*
*Chacune pense à un nombre et le dit à ses deux voisins.*
*Puis chaque personne dit à voix haute la moyenne des nombres de ses deux voisins.*
*Si les nombres de 1 à 10, dans cet ordre, ont été annoncés, à quel nombre la personne qui a dit 6 a-t-elle pensé ?*




Notons $n_1$, $n_2$, $\cdots$, $n_9$ et $n_{10}$ les nombres auxquels ont pensé les personnes qui ont respectivement annoncé 1, 2,$\cdots$, 9 et 10. Il s'agit donc de déterminer $n_6$. On a :

$$\begin{cases} \dfrac{n_2+n_{10}}{2}=1 \\ \dfrac{n_1+n_3}{2}=2 \\ \dfrac{n_2+n_4}{2}=3 \\ \dfrac{n_4+n_6}{2}=5 \\ \dfrac{n_5+n_7}{2}=6 \\ \dfrac{n_6+n_8}{2}=7 \\ \dfrac{n_7+n_9}{2}=8 \\ \dfrac{n_8+n_{10}}{2}=9 \\ \dfrac{n_9+n_1}{2}=10 \\ \dfrac{n_2+n_{10}}{2}=1 \end{cases}$$

Ainsi : $n_6=10-n_4$
Or : $n_4=6-n_2$
Donc : $n_6=10-(6-n_2)=4+n_2$
Or : $n_2=2-n_{10}$
Donc : $n_6=4+(2-n_{10})=6-n_{10}$
Or : $n_{10}=18-n_8$
Donc : $n_6=6-(18-n_8)=n_8-12$
Or : $n_8=14-n_6$
Donc : $n_6=(14-n_6)-12=2-n_6$
Soit : $2n_6=2 \Leftrightarrow n_6=1$
La personne qui a dit 6 avait pensé au nombre 1.

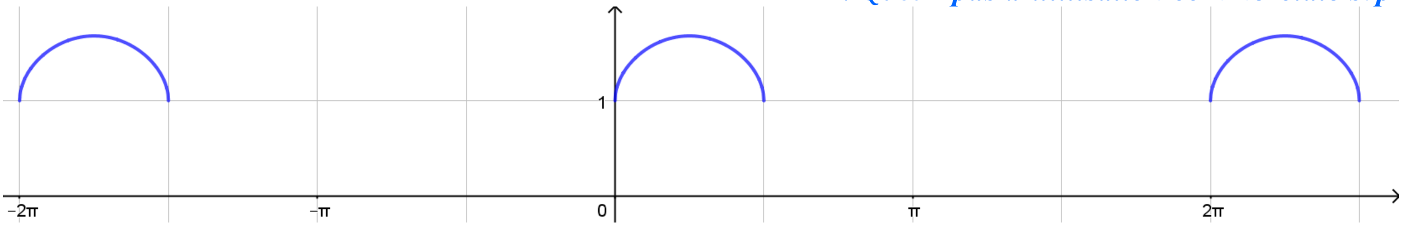
**Exercice 17 :**

*Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}=1$$

**Première méthode :**

On définit la fonction $f(x)=\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}$, définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $2\pi$-périodique.




$$f'(x)=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}=\frac{-\sin x\times\sqrt{\sin x}}{2\sqrt{\cos x}\sqrt{\sin x}}+\frac{\cos x\times\sqrt{\cos x}}{2\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x}}=\frac{(\cos x)^{\frac{3}{2}}-(\sin x)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x}}$$

Si $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ : $\cos x\geq\sin x$ , donc : $(\cos x)^{\frac{3}{2}}\geq(\sin x)^{\frac{3}{2}}$ et $f'(x)\geq 0$

Si $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ : $\cos x\leq\sin x$ , donc : $(\cos x)^{\frac{3}{2}}\leq(\sin x)^{\frac{3}{2}}$ et $f'(x)\leq 0$

On déduit le tableau de variations de $f$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| Variations de $f$ | $1$ | ↗ | $\sqrt{2}$ | ↘ | $1$ |

Les solutions sont :

$$S=\left\{0+k\times 2\pi;\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

**Deuxième méthode :**

Si : $a\in\left]0;1\right[$ , alors : $a^2<a<\sqrt{a}$ .

On déduit donc :

$$\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}>(\cos x)^2+(\sin x)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}>1$$

Les seules solutions possibles sont :

$\cos a=0$ , d'où : $\sqrt{\cos a}+\sqrt{\sin a}=1$

$\cos a=1$ , d'où : $\sqrt{\cos a}+\sqrt{\sin a}=1$

Les solutions sont :

$$S=\left\{0+k\times 2\pi;\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

**Troisième méthode :**

On résout d'abord sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ :

$$\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}=1$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow\quad\cos x+\sin x+2\sqrt{\cos x\times\sin x}=1$$

$$\Leftrightarrow\quad\sqrt{\cos x\times\sin x}=\frac{1-\cos x-\sin x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x \times \sin x = \left(\frac{1-\cos x-\sin x}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x \times \sin x = \frac{1+\cos^2 x+\sin^2 x-2\cos x-2\sin x+2\cos x\sin x}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos x\sin x = 1+1-2\cos x-2\sin x+2\cos x\sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\cos x-\sin x-\cos x\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x\left(-\sin x-1\right) = \sin x-1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{\sin x-1}{-\sin x-1} = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x = \left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1^2-\sin^2 x = \frac{\left(1-\sin x\right)^2}{\left(1+\sin x\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1+\sin x\right)\left(1-\sin x\right) = \frac{\left(1-\sin x\right)^2}{\left(1+\sin x\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1+\sin x\right)^3\left(1-\sin x\right) = \left(1-\sin x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1-\sin x\right)\left[\left(1+\sin x\right)^3-\left(1-\sin x\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1-\sin x\right)\left[1+3\sin x+3\sin^2 x+\sin^3 x-1+\sin x\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1-\sin x\right)\left(4\sin x+3\sin^2 x+\sin^3 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1-\sin x\right)\sin x\left(\sin^2 x+3\sin x+4\right) = 0$$

Soit : $1-\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$

Soit : $\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Soit : $\sin^2 x+3\sin x+4 = 0$

on pose $\mathrm{X} = \sin x$ , l'équation devient :

$\mathrm{X}^2+3\mathrm{X}+4 = 0$ $\qquad \rightarrow \Delta = 9-16 = -7$ : il n'y a pas de solution.

La fonction $f(x) = \sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}-1$ est $2\pi$-périodique, donc les solutions de l'équation $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x} = 1$ sur $\mathbb{R}$ sont :

$$S = \left\{k \times 2\pi ; \frac{\pi}{2}+k \times 2\pi\right\} ,\ k \in \mathbb{Z}$$

## Exercice 18 :

*Mathias calcule le carré d'un nombre à deux chiffres, puis le carré du nombre obtenu en permutant le chiffre des unités et celui des dizaines du nombre de départ, qui sont deux chiffres différents.*
*Surprise ! Les deux carrés s'écrivent avec les mêmes chiffres écrits dans un ordre différent !*
*Ecrire un programme permettant de trouver ces nombres.*

Soit $\overline{ab}$ le nombre initial.
On obtient :

$$\overline{ab}^2 = \overline{cde} \text{ ou } \overline{ab}^2 = \overline{cdef}$$

On doit avoir :

$$\overline{ba}^2 \in \left\{\overline{ced}\,, \overline{dce}\,, \overline{dec}\,, \overline{ecd}\,, \overline{edc}\right\}$$

De même pour $\overline{ba}^2$

```
def liste_des_chiffres(a):
   liste = []
   while a != 0:
      liste.append(a % 10)
      a = a // 10
   liste.sort
   return liste

resultat = []
for x in range(0,10):
   for y in range(0,10):
      c = (10*x + y) **2
      d = (10*y + x) **2
      liste_C = liste_des_chiffres(c)
      liste_D = liste_des_chiffres(d)
      if liste_C == liste_D:
         resultat.append(10*x + y)
print(resultat)
```

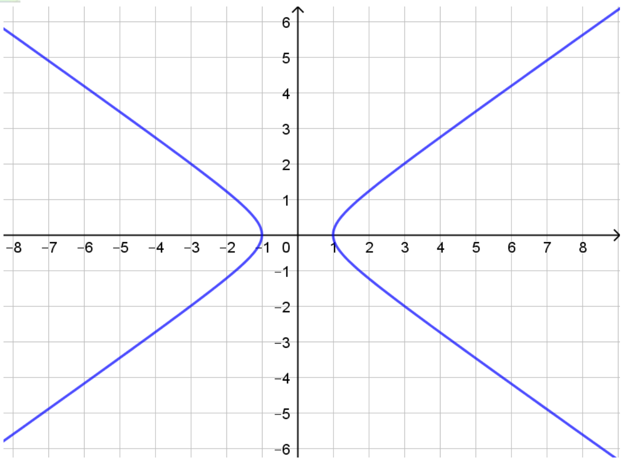
On obtient :

[0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99]

## Exercice 19 :

*Ci –contre est représenté dans un repère l'ensemble des points dont le couple $(x;y)$ de coordonnées vérifie la relation $x^2-2y^2=1$.*

*On s'intéresse plus particulièrement aux points de cette courbe dont les coordonnées sont des entiers comme par exemple le point dont le couple de coordonnées est $(1;0)$*




1. *Donner quatre autres couples d'entiers $(x;y)$ tels que $x^2-2y^2=1$.*

$$3^2-2\times 3^2=9-8=1 \;\rightarrow (3;2)$$

On a : $(-1;0)$ , $(3;2)$ , $(3;-2)$ , $(-3;2)$ , $(-3;-2)$

2. *Soit $a$ et $b$ des entiers naturels. On pose $\mathrm{A}=a+2b$ et $\mathrm{B}=a+b$.Exprimer $\mathrm{A}^2-2\mathrm{B}^2$ en fonction de $a^2-2b^2$.*

*Donner un nouveau couple d'entiers $(x;y)$ solution de l'équation $x^2-2y^2=1$ tel que $x>10$.*

$$\mathrm{A}^2-2\mathrm{B}^2=(a+2b)^2-2(a+b)^2=a^2+4ab+4b^2-2a^2-4ab-2b^2$$
$$=2b^2-a^2=-\left(a^2-2b^2\right)$$

En partant du couple $(3;2)$, on obtient :

$$\mathrm{A}=a+2b=3+2\times 2=7 \quad \text{et} \quad \mathrm{B}=a+b=3+2=5$$

Ainsi :

$$\mathrm{A}^2-2\mathrm{B}^2=-\left(a^2-2b^2\right)=-1$$

On réitère cette opération, en posant :

$$\mathrm{C}=\mathrm{A}+2\mathrm{B}=7+2\times5=17 \quad \text{et} \quad \mathrm{D}=\mathrm{A}+\mathrm{B}=7+5=12$$

Ainsi :

$$\mathrm{C}^2-2\mathrm{D}^2=-\left(\mathrm{A}^2-2\mathrm{B}^2\right)=-(-1)=1$$

Soit le couple solution $(17;12)$.

Vérification :

$$17^2-2\times12^2=289-288=1$$

**3.** *Rédiger un algorithme affichant le premier couple d'entiers $(x;y)$ solution de l'équation $x^2-2y^2=1$ et tel que $x>2018$. Quel est le couple obtenu ?*

**Premier programme :**

```
x = 2017
res = 0
while res == 0:
   x += 1
   y = ((x**2 - 1)/2)**0.5
   if y % 1 == 0:
      res = 1
   if x > 1000000:
      res = 1
print(x,y)
```

On obtient :

```
3363 2378.0
```

**Deuxième programme :**

```
a=1
b=0
C,D = a,b
while C < 2018:
        A,B  =a+2*b,a+b
        C,D = A+2*B,A+B
        a,b = C,D
print([C,D])
```

On obtient :

```
[3363, 2378]
```