Problèmes sur les suites arithmético-géométriques

Exercice 5B.1

Dans un pays, un organisme étudie l'évolution de la population. Compte tenu des naissances et des décès, on a constaté que la population a un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille.
De plus, chaque année, 12 000 personnes arrivent dans ce pays et 5 000 le quitte.
En 2010, la population de ce pays était de 75 millions d'habitants. On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.
On note P_n la population de l'année (2010 + n) exprimée en milliers d'habitants.

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite. Cette suite est-elle géométrique ? Arithmétique ? justifier votre réponse.
2) Donner la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n .
3) On donne $U_n = P_n + 500$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique.
4) Donner la formule explicite de U_n.
5) En déduire la formule explicite de P_n.
6) Combien d'habitants peut-on prévoir en 2015 ?
7) Au bout de combien d'années la population aura-t-telle doublée ?

Exercice 5B.2

Le 1er janvier 2013, une grande entreprise compte 1500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif de l'entreprise au 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle U_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année (2013 + n)

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite. Cette suite est-elle géométrique ? Arithmétique ? Justifier votre réponse.
2) Donner la relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n.
3) Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - 1000$. Démontrer alors que la suite (V_n) est géométrique.
4) En déduire l'expression (V_n) de puis (U_n) celle de en fonction de n.
5) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} - U_n = -50 \times 0{,}9^n$.
   En déduire alors le sens de variation de la suite (U_n).
6) Au 1er janvier 2013, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés.
   A partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-telle plus en sureffectif ?

Exercice 5B.3

Une association caritative a constaté que chaque année, 20 % des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.
Lors de la première année de l'étude, l'association comptait 1 000 donateurs. On note U_n le nombre de donateurs lors de la *n-ième* année ; ainsi $U_1 = 1000$.

1) Calculer alors U_2 et U_3.
2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $U_{n+1} = 0{,}8 \times U_n + 300$
3) Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = 1500 - U_n$. Démontrer alors que la suite (V_n) est géométrique.
   Précisez alors son premier terme et sa raison.
4) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
5) Après avoir factorisé l'expression $U_{n+1} - U_n$, en déduire le sens de variation de la suite (U_n).
6) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.* Au bout de combien d'années, le contexte restant le même, le nombre de donateurs dépassera-t-il 1 500?

Exercice 5B.4 : Antilles Guyane Septembre 2011 :

Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après midi à partir du 1er septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.

Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que d'une semaine sur l'autre 5% des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.

Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année scolaire 2010/2011.

La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation.

On note U_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi $U_0 = 80$.

Pour tout entier naturel *n*, on note *n u* le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de *n* semaines.

1. Montrer que $U_1 = 86$.
2. Pour tout entier naturel *n*, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
3. Pour tout entier naturel *n*, on pose $a_n = U_n - 200$.
   a. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Pour tout entier naturel *n*, exprimer a_n en fonction de *n*.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, on a : $U_n = 200 - 120 \times 0,95^n$.

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel *n*, on a: $U_{n+1} - U_n = 6 \times 0,95^n$.
   b. En déduire que le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?

Exercice 5B.5

Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement de 80 % ainsi que l'apparition de 4000 nouveaux abonnés. La politique du club fait que seuls les abonnés peuvent assister aux rencontres de l'équipe première. On note a_n le nombre d'abonnés à la fin de l'année $2010 + n$ et on précise que $a_0 = 7000$ pour l'année 2010.

1) Calculer le nombre d'abonnés en 2011 puis en 2012.
2) Expliquer pourquoi $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_{n+1} = 0,8a_n + 4000$.
3) On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n = 20\,000 - a_n$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et u_0.
4) Donner la formule explicite de (u_n) puis de (a_n).
5) Le club envisage la construction d'un nouveau stade. Quelle capacité faut-il envisager ?
6) Actuellement, la capacité du stade est de 18 500 places. A l'aide de l'algorithme ci-dessous, déterminer en quelle année le stade ne pourra plus accueillir l'ensemble des abonnés.

Variables :	*N* est un nombre entier naturel non nul.
	A est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à *A* la valeur …
	Affecter à *N* la valeur…
Traitement :	Tant que ………
	Affecter à ………………………..
	Affecter à ……………………..
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher …..

Exercice 5B.6

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2500 inscriptions en 2013.
Elle estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.
On modélise cette situation par une suite numérique (a_n).
On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $(2013+n)$.

1) a) Calculer a_1 et a_2.
   b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a la relation $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$.
2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2000$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de 1er terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,8$
   b) En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.
   c) Calculer la limite de la suite (a_n).
   d) Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?
3) On propose l'algorithme suivant :

```
Variables :        A est un nombre réel
                   N est un entier naturel
Initialisation :   Affecter à N la valeur 0
                   Affecter à A la valeur 2 500
Traitement :       Tant que A – 2000 > 50
                        A prend la valeur A*0,8 + 400
                        N prend la valeur N+1
                   Fin Tant que
Sortie :           Afficher N
```

   a) Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.
   c) Écrire l'algorithme proposé avec Python et vérifier le résultat obtenu dans la question précédente.

Exercice 5B.7

On comptait 700 élèves dans un lycée lors de la rentrée de 2012.
À la fin de chaque année scolaire, après le départ des nouveaux bacheliers et des élèves quittant l'établissement, le lycée conserve 70% de son effectif pour l'année suivante.
Il reçoit 240 nouveaux élèves à chaque rentrée.

1) Calculer le nombre d'élèves dans le lycée aux rentrées 2013 et 2014.
2) On définit la suite (a_n) par : $a_0 = 700$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,7 \times a_n + 240$.
   Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 800$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,7. Préciser son premier terme.
   b) Exprimer u_n en fonction de n.
   c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
3) On choisit de modéliser le nombre d'élèves du lycée par les termes de la suite (a_n).
   Il faudra agrandir le lycée dès que l'effectif sera supérieur ou égal à 780 élèves.
   a) Montrer que résoudre l'inéquation $800 - 100 \times 0,7^n \geq 780$ revient à résoudre l'inéquation :
   $$0,7^n \leq 0,2.$$
   b) En quelle année faudra-t-il agrandir le lycée ?

Exercice 5B.8

En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents. Chacune des années suivantes on a constaté que :

- 10% des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club ;
- 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club.

On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.

Partie A

On donne l'algorithme ci-contre :

```
Entrée :          Saisir un entier n positif
Initialisation :  X prend la valeur 80
Traitement :      Pour i allant de 1 à n
                      Affecter à X la valeur 0,9*X+20
                  Fin Pour
                  X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur
Sortie :          Afficher X
```

1) Pour la valeur $n=2$ saisie, quelle est la valeur affichée à la sortie de cet algorithme ?
2) Interpréter dans le contexte du club de randonnée, pour la valeur $n=2$ saisie, le nombre affiché à la sortie de cet algorithme.

Partie B

1) On considère la suite (a_n) définie par $a_0=80$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0,9\times a_n+20$.

   Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n=a_n-200$.

   a) Démontrer que (b_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

   b) Exprimer b_n en fonction de n.

2) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n=200-120\times 0,9^n$.
3) Quelle est la limite de la suite (a_n) ?

Partie C

1) L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable ?
2) Même question si l'objectif du président du club est d'atteindre au moins 300 adhérents.

Exercice 5B.9

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010+n)$. En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1) Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0=50$ et pour tout entier naturel n par la relation :

   $$u_{n+1}=0,95\times u_n+3$$

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n=60-u_n$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

   b) Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

   c) Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n=60-10\times 0,95^n$.

3) Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
4) a) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $u_{n+1}-u_n=0,5\times 0,95^n$.

   b) En déduire la monotonie de la suite.

5) Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.
6) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 5B.1

Dans un pays, un organisme étudie l'évolution de la population. Compte tenu des naissances et des décès, on a constaté que la population a un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille.
De plus, chaque année, 12 000 personnes arrivent dans ce pays et 5 000 le quitte.
En 2010, la population de ce pays était de 75 millions d'habitants. On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.
On note P_n la population de l'année (2010 + n) exprimée en milliers d'habitants.

1) *Déterminer les trois premiers termes de la suite. Cette suite est-elle géométrique ? Arithmétique ? justifier votre réponse.*

$P_0 = 75\ 000$

Un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille correspond à un coefficient multiplicateur égal à $1,014$, donc :

$P_1 = P_0 \times 1,014 + 12 - 5 = 75\ 000 \times 1,014 + 7 = 76\ 057$

$P_2 = P_1 \times 1,014 + 7 = 76\ 057 \times 1,014 + 7 = 77\ 128,798$

$P_1 - P_0 = 76\ 057 - 75\ 000 = 1\ 057$ et $P_2 - P_1 = 77\ 128,798 - 76\ 057 = 1\ 071,798$

→cette suite n'est pas arithmétique

$\dfrac{P_1}{P_0} = \dfrac{76\ 057}{75\ 000} \simeq 1,0140933$ et $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{77\ 128,798}{76\ 057} \simeq 1,014092$

→cette suite n'est pas géométrique

2) *Donner la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n .*

$P_{n+1} = P_n \times 1,014 + 7$

3) *On donne $U_n = P_n + 500$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique.*

$$U_{n+1} = P_{n+1} + 500 = P_n \times 1,014 + 7 + 500 = P_n \times 1,014 + 507 = 1,014\left(P_n + \frac{507}{1,014}\right)$$

$$= 1,014(P_n + 500) = 1,014 U_n$$

donc (U_n) est une suite géométrique de raison 1,014 , de premier terme $U_0 = P_0 + 500 = 75\ 500$

4) *Donner la formule explicite de U_n.*

$U_n = U_0 \times q^n = 75\ 500 \times 1,014^n$

5) *En déduire la formule explicite de P_n.*

$U_n = P_n + 500$ donc $P_n = U_n - 500 = 75\ 500 \times 1,014^n - 500$

6) *Combien d'habitants peut-on prévoir en 2015 ?*

$P_5 = 75\ 500 \times 1,014^5 - 500 \simeq 86\ 435,066$, soit 86 435 066 habitants.

7) *Au bout de combien d'années la population aura-t-elle doublée ?*

On cherche le plus petit entier N tel que $U_N \geq 2U_0$

→avec la calculatrice, saisir la fonction associée puis déf-table puis table :

On trouve N = 50 : au bout de 50 ans

Exercice 5B.2

Le 1er janvier 2013, une grande entreprise compte 1500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif de l'entreprise au 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle U_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année (2013 + n)

1) *Déterminer les trois premiers termes de la suite. Cette suite est-elle géométrique ? Arithmétique ? Justifier votre réponse.*

Une baisse annuelle de 10% correspond à un coefficient multiplicateur égal à $0,9$, donc :

$U_0 = 1500$

$U_1 = U_0 \times 0,9 + 100 = 1500 \times 0,9 + 100 = 1350 + 100 = 1450$

$U_2 = U_1 \times 0,9 + 100 = 1450 \times 0,9 + 100 = 1305 + 100 = 1405$

$\dfrac{U_1}{U_0} = \dfrac{1450}{1500} \simeq 0,97$ et $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{1405}{1450} \simeq 0,94$: cette suite n'est pas géométrique

$U_1 - U_0 = 1450 - 1500 = -50$ et $U_2 - U_1 = 1405 - 1450 = -45$: elle n'est pas arithmétique

2) *Donner la relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n.*

$U_{n+1} = U_n \times 0,9 + 100$

3) *Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - 1000$. Démontrer alors que la suite (V_n) est géométrique*

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 1000 = U_n \times 0,9 + 100 - 1000 = U_n \times 0,9 - 900 = 0,9\left(U_n - \frac{900}{0,9}\right) = 0,9(U_n - 1000)$$

$$= 0,9 \times V_n$$

donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,9 , de premier terme $V_0 = U_0 - 1000 = 500$

4) *En déduire l'expression (V_n) de puis (U_n) celle de en fonction de n.*

$V_n = V_0 \times q^n = 500 \times 0,9^n$

$V_n = U_n - 1000$ donc $U_n = V_n + 1000 = 500 \times 0,9^n + 1000$

5) *Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} - U_n = -50 \times 0,9^n$.*

En déduire alors le sens de variation de la suite (U_n).

$$U_{n+1} - U_n = \left(500 \times 0,9^{n+1} + 1000\right) - \left(500 \times 0,9^n + 1000\right) = 500 \times 0,9^{n+1} + 1000 - 500 \times 0,9^n - 1000$$

$$= 500 \times 0,9^{n+1} - 500 \times 0,9^n = 500 \times \left(0,9^{n+1} - 0,9^n\right) = 500 \times \left(0,9 \times 0,9^n - 1 \times 0,9^n\right)$$

$$= 500 \times 0,9^n \times (0,9 - 1) = 500 \times 0,9^n \times (-0,1) = -50 \times 0,9^n$$

$U_{n+1} - U_n < 0$ donc la suite (U_n) est décroissante.

6) *Au 1er janvier 2013, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés, ce qui signifie courtoisement que l'entreprise veut supprimer 300 postes.*

A partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-telle plus en sureffectif ?

On cherche donc à partir de quel rang n le nombre de salariés devient inférieur à 1200, soit :

$U_n < 1200$

$500 \times 0,9^n + 1000 < 1200$

$500 \times 0,9^n < 200$

$0,9^n < \dfrac{200}{500}$

$0,9^n < 0,4$ →on trouve n = 9 : au bout de 9 ans

Autre méthode : définir une suite numérique avec la calculatrice

Autre méthode : définir un programme Python ou avec la calculatrice :

```
u=1500
n=0
while u>1200:
    u=0.9*u+100
```

```
    n+=1
print("Le rang cherché est :",n)
print("La valeur de U(",n,") est :",u)
```
→ Le rang cherché est : 9
La valeur de U(9) est : 1193.7102445

Exercice 5B.3

Une association caritative a constaté que chaque année, 20 % des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.
Lors de la première année de l'étude, l'association comptait 1 000 donateurs. On note U_n *le nombre de donateurs lors de la n-ième année ; ainsi* $U_1 = 1000$.

1) *Calculer alors* U_2 *et* U_3.

Une baisse annuelle de 20% correspond à un coefficient multiplicateur égal à $0,8$, donc :

$$U_2 = U_1 \times 0,8 + 300 = 1000 \times 0,8 + 300 = 800 + 300 = 1100$$

$$U_2 = U_2 \times 0,8 + 300 = 1100 \times 0,8 + 300 = 880 + 300 = 1180$$

2) *Montrer que pour tout entier naturel n non nul :* $U_{n+1} = 0,8 \times U_n + 300$

En généralisant les explications ci-dessus : $U_{n+1} = 0,8 \times U_n + 300$

3) *Pour tout entier naturel n, on pose* $V_n = 1500 - U_n$. *Démontrer alors que la suite* (V_n) *est géométrique. Précisez alors son premier terme et sa raison.*

$$V_{n+1} = 1500 - U_{n+1} = 1500 - (0,8 \times U_n + 300) = 1500 - 0,8 \times U_n - 300 = 1200 - 0,8 \times U_n$$

$$= 0,8\left(\frac{1200}{0,8} - U_n\right) = 0,8(1500 - U_n) = 0,8 \times V_n$$

donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,8 , de premier terme $V_1 = 1500 - U_1 = 500$

$$V_n = V_1 \times q^{n-1} = 500 \times 0,8^{n-1}$$

4) *En déduire l'expression de* U_n *en fonction de n.*

$V_n = 1500 - U_n$ donc $U_n = 1500 - V_n = 1500 - 500 \times 0,8^{n-1}$

5) *Après avoir factorisé l'expression* $U_{n+1} - U_n$, *en déduire le sens de variation de la suite* (U_n).

$$U_{n+1} - U_n = \left(1500 - 500 \times 0,8^n\right) - \left(1500 - 500 \times 0,8^{n-1}\right) = 1500 - 500 \times 0,8^n - 1500 + 500 \times 0,8^{n-1}$$

$$= -500 \times 0,8^n + 500 \times 0,8^{n-1} = 500 \times \left(-0,8^n + 0,8^{n-1}\right) = 500 \times \left(0,8^{n-1} \times (-0,8) + 0,8^{n-1} \times 1\right)$$

$$= 500 \times 0,8^{n-1} \times (-0,8 + 1) = 500 \times 0,8^{n-1} \times 0,2 = 100 \times 0,8^{n-1}$$

$U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite (U_n) est croissante.

6) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Au bout de combien d'années, le contexte restant le même, le nombre de donateurs dépassera-t-il 1 500?

Le programme attendu ne marche pas et une vérification avec la calculatrice montre que le nombre de donateurs ne dépassera jamais 1500.
D'où une petite ruse dans le programme ci-dessous : à quel moment le nombre de donateurs sera-t-il supérieur à 1499 ! Tout simplement !

```
u=1000
n=1
while u<=1499:
    u=0.8*u+300
```

```
    n+=1
print("Le rang cherché est :",n)
print("La valeur de U(",n,") est :",u)
```

→ Le rang cherché est : 29
La valeur de U(29) est : 1499.0328593443085

Exercice 5B.4 : Antilles Guyane Septembre 2011 :

Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après midi à partir du 1er septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.

Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que d'une semaine sur l'autre 5% des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.

Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année scolaire 2010/2011.

La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation.

On note U_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi $U_0 = 80$.

Pour tout entier naturel *n*, on note *n u* le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de *n* semaines.

1. Montrer que $U_1 = 86$.

Une baisse de 5% des réinscriptions correspond à un coefficient multiplicateur $k = 0,95$.

Ainsi : $U_1 = 0,95 \times U_0 + 10 = 0,95 \times 80 + 10 = 86$

2. Pour tout entier naturel *n*, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

En généralisant la première étape avec ce coefficient multiplicateur, on obtient :

$$U_{n+1} = 0,95 \times U_n + 10$$

3. Pour tout entier naturel *n*, on pose $a_n = U_n - 200$.

a. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

$$a_{n+1} = U_{n+1} - 200 = 0,95 \times U_n + 10 - 200 = 0,95 \times U_n - 190 = 0,95\left(U_n - \frac{190}{0,95}\right)$$

$$a_{n+1} = 0,95(U_n - 200) = 0,95 \times a_n$$

Ainsi (a_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$, de 1er terme $a_0 = U_0 - 200 = -120$

b. Pour tout entier naturel *n*, exprimer a_n en fonction de *n*.

$$a_n = a_0 \times q^n = -120 \times 0,95^n$$

c. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, on a : $U_n = 200 - 120 \times 0,95^n$.

$a_n = U_n - 200$ donc $U_n = a_n + 200 = -120 \times 0,95^n + 200$

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel *n*, on a: $U_{n+1} - U_n = 6 \times 0,95^n$.

$$U_{n+1} - U_n = \left(200 - 120 \times 0,95^{n+1}\right) - \left(200 - 120 \times 0,95^n\right)$$
$$= 200 - 120 \times 0,95^{n+1} - 200 + 120 \times 0,95^n = 120 \times 0,95^n - 120 \times 0,95^{n+1}$$
$$= 120 \times \left(0,95^n - 0,95^{n+1}\right) = 120 \times \left(0,95^n \times 1 - 0,95^n \times 0,95\right)$$
$$= 120 \times 0,95^n \times (1 - 0,95) = 120 \times 0,95^n \times 0,05 = 6 \times 0,95^n$$

b. En déduire que le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines.

$6 \times 0,95^n > 0$ donc $U_{n+1} - U_n > 0$: la suite (U_n) est croissante et le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?*

On cherche pour quelle valeur n la suite (U_n) dépassera 150 :

→Avec la calculatrice, on trouve n = 18 , soit à partir de 18 semaines.

→Avec Python :

```
u=80
n=0
while u<150:
   u=0.95*u+10
   n+=1
print("Le rang cherché est :",n)
print("La valeur de U(",n,") est :",u)
```

→ Le rang cherché est : 18
La valeur de U(18) est : 152.3342817850137

Exercice 5B.5

Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement de 80 % ainsi que l'apparition de 4000 nouveaux abonnés. La politique du club fait que seuls les abonnés peuvent assister aux rencontres de l'équipe première. On note a_n le nombre d'abonnés à la fin de l'année $2010+n$ et on précise que $a_0=7000$ pour l'année 2010.

1) *Calculer le nombre d'abonnés en 2011 puis en 2012.*

Un taux de réabonnement de 80 % traduit une baisse de 20 % des réabonnements.

→le coefficient multiplicateur associé à cette baisse est égal à 0,8.

En 2011 : $a_1=7000\times 0{,}8+4000=9600$

En 2012 : $a_2=9600\times 0{,}8+4000=11680$

2) *Expliquer pourquoi* $\forall n\in\mathbb{N}\ \ a_{n+1}=0{,}8a_n+4000$.

Avec le coefficient précédent, on peut généraliser le calcul de chaque indice :

$$a_{n+1}=0{,}8a_n+4000$$

3) *On pose* $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n=20\,000-a_n$.

Montrer que (u_n) *est une suite géométrique dont on précisera la raison et* u_0.

$$u_{n+1}=20\,000-a_{n+1}=20\,000-(0{,}8a_n+4\,000)=20\,000-0{,}8a_n-4\,000=16\,000-0{,}8a_n$$

$$=0{,}8\left(\frac{16\,000}{0{,}8}-a_n\right)=0{,}8(20\,000-a_n)=0{,}8\times u_n$$

(u_n) est une suite géométrique de raison $q=0{,}8$ de 1er terme $u_0=20\,000-a_0=13\,000$.

4) *Donner la formule explicite de* (u_n) *puis de* (a_n).

$$u_n=u_0\times q^n=13\,000\times 0{,}8^n$$

$u_n=20\,000-a_n$ donc $a_n=20\,000-u_n=20\,000-13\,000\times 0{,}8^n$

5) *Le club envisage la construction d'un nouveau stade. Quelle capacité faut-il envisager ?*

La suite (a_n) représente le nombre de spectateurs :

$0<0{,}8<1$ donc $\lim 0{,}8^n=0$ et $\lim 13\,000\times 0{,}8^n=0$

Et $\lim 20\,000-13\,000\times 0{,}8^n=20\,000$.

Il devrait y avoir 20 000 abonnés d'où une capacité équivalente à anticiper pour le futur stade.

6) *Actuellement, la capacité du stade est de 18 500 places. A l'aide de l'algorithme ci-dessous, déterminer en quelle année le stade ne pourra plus accueillir l'ensemble des abonnés.*

Variables :	*N* est un nombre entier naturel non nul.
	A est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à *A* la valeur **7 000**
	Affecter à *N* la valeur **0**
Traitement :	Tant que **A < 18 500**
	Affecter à A la valeur **0,8*A+4000** **// A Prend_la_valeur 0,8*A+4000**
	Affecter à **N la valeur N+1** **// N Prend_la_valeur N + 1**
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher **2010+N**

On peut soit faire un programme similaire avec la calculatrice :

```
PROGRAM:STADE
:7000→A
:0→N
:While A<18500
:N+1→N
:.8A+4000→A
:End
:Disp "ANNEE=",2010+N
```

Soit simplement entrer la fonction : Y = 20 000 – 13 000*0,8^N

Et tester des valeurs de N ou utiliser la table

→on obtient : N = 10 , soit en 2020.

En 2020, le stade ne pourra plus accueillir les abonnés du club.

Exercice 5B.6

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2500 inscriptions en 2013.

Elle estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.

On modélise cette situation par une suite numérique (a_n).

On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $(2013+n)$.

1) a) $a_1 = a_0 \times 80\% + 400 = 2500 \times 0,8 + 400 = 2400$

$a_2 = a_1 \times 80\% + 400 = 2400 \times 0,8 + 400 = 2320$

b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a la relation $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$.

Par définition : $a_{n+1} = a_n \times 80\% + 400 = 0,8 \times a_n + 400$

2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2000$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,8$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a_{n+1} - 2000}{a_n - 2000} = \frac{0,8 \times a_n + 400 - 2000}{a_n - 2000} = \frac{0,8 \times a_n - 1600}{a_n - 2000} = \frac{0,8 \times (a_n - 2000)}{a_n - 2000} = 0,8$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = a_0 - 2000 = 2500 - 2000 = 500$ et de raison $q = 0,8$.

(v_n) s'écrit : $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,8^n$

b) En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.

$v_n = a_n - 2000$ donc $a_n = v_n + 2000 = 500 \times 0{,}8^n + 2000$

c) Calculer la limite de la suite (a_n).

$0{,}8 \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 2000$

d) Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?

A long terme, le nombre d'adhérents va se stabiliser autour de 2000.

3) On propose l'algorithme suivant :

```
Variables :        A est un nombre réel
                   N est un entier naturel
Initialisation :   Affecter à N la valeur 0
                   Affecter à A la valeur 2500
Traitement :       Tant que A – 2000 > 50
                       A prend la valeur A*0,8 + 400
                       N prend la valeur N+1
                   Fin Tant que
Sortie :           Afficher N
```

a) Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

→ Il calcule au bout de combien d'années le nombre d'adhérents passe en dessous de 2050.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

B2 =B1*0,8+400

	A	B
1	0	2500
2	1	2400
3	2	2320
4	3	2256
5	4	2204,8
6	5	2163,84
7	6	2131,072
8	7	2104,8576
9	8	2083,88608
10	9	2067,10886
11	10	2053,68709
12	11	2042,94967
13	12	2034,35974
14	13	2027,48779
15	14	2021,99023

→au bout de 11 ans.

c) Écrire l'algorithme proposé avec Python et vérifier le résultat obtenu dans la question précédente.

```
n = 0
u = 2500
while u >= 2050:
   n += 1
   u = 0.8*u + 400
print("Le seuil cherché est :",n)
print("u(",n,") = ",u)
```

→ Le seuil cherché est : 11
u(11) = 2042.9496729600005

Exercice 5B.7

On comptait 700 élèves dans un lycée lors de la rentrée de 2012.
À la fin de chaque année scolaire, après le départ des nouveaux bacheliers et des élèves quittant l'établissement, le lycée conserve 70% de son effectif pour l'année suivante.
Il reçoit 240 nouveaux élèves à chaque rentrée.

1) Calculer le nombre d'élèves dans le lycée aux rentrées 2013 et 2014.

En 2013 : $700\times70\%+240=490+240=730$

En 2014 : $730\times70\%+240=511+240=751$

2) On définit la suite (a_n) par : $a_0=700$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1}=0,7\times a_n+240$.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=a_n-800$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,7. Préciser son premier terme.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a_{n+1}-800}{a_n-800}=\frac{0,7\times a_n+240-800}{a_n-800}=\frac{0,7\times a_n-560}{a_n-800}=\frac{0,7\times(a_n-800)}{a_n-800}=0,7$$

Autre méthode :

$$u_{n+1}=a_{n+1}-800=0,7\times a_n+240-800=0,7\times a_n-560=0,7(a_n-800)=0,7u_n$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=a_0-800=700-800=-100$ et de raison $q=0,7$.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

$$u_n=u_0\times q^n=-100\times0,7^n$$

c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

$$u_n=a_n-800 \quad \text{donc} \quad a_n=u_n+800=-100\times0,7^n+800.$$

3) On choisit de modéliser le nombre d'élèves du lycée par les termes de la suite (a_n).

Il faudra agrandir le lycée dès que l'effectif sera supérieur ou égal à 780 élèves.

a) Montrer que résoudre l'inéquation $800-100\times0,7^n\geq780$ revient à résoudre l'inéquation : $0,7^n\leq0,2$.

$$800-100\times0,7^n\geq780$$
$$-100\times0,7^n\geq780-800$$
$$0,7^n\leq\frac{-20}{-100}$$
$$0,7^n\leq\frac{1}{5}$$

b) En quelle année faudra-t-il agrandir le lycée ?

$$\ln(0,7^n)\leq\ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$n\times\ln(0,7)\leq\ln\left(\frac{1}{5}\right) \qquad \rightarrow \ln(0,7)<0$$

$$n\geq\frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln(0,7)}$$

$n\geq4,5$ $\rightarrow$ soit au bout de la cinquième année en 2017.

Exercice 5B.8

En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents. Chacune des années suivantes on a constaté que :

- 10% des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club ;
- 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club.

On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.

Partie A

On donne l'algorithme ci-dessous :

Entrée :	Saisir un entier n positif
Initialisation :	X prend la valeur 80
Traitement :	Pour i allant de 1 à n Affecter à X la valeur 0,9*X+20 Fin Pour X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur
Sortie :	Afficher X

1) Pour la valeur $n=2$ saisie, quelle est la valeur affichée à la sortie de cet algorithme ?

```
from math import *
n = int(input("Veuillez saisir un rang :"))
X = 80
for i in range(1,n+1):
   X = 0.9*X + 20
print("A partir de",n, "années, il y aura",floor(X),"adhérents")
```

→ A partir de 2 années, il y aura 102 adhérents

2) Interpréter dans le contexte du club de randonnée, pour la valeur $n=2$ saisie, le nombre affiché à la sortie de cet algorithme.

→Dans deux ans, il devrait y avoir 102 adhérents.

Partie B

1) On considère la suite (a_n) définie par $a_0=80$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0{,}9\times a_n+20$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n=a_n-200$.

a) Démontrer que (b_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

$$b_{n+1}=a_{n+1}-200=a_{n+1}=0{,}9\times a_n+20-200=0{,}9\times a_n-180=0{,}9\times(a_n-200)=0{,}9\times b_n$$

Donc (b_n) est une suite géométrique de premier terme $b_0=a_0-200=80-200=-120$ et de raison $q=0{,}9$.

b) Exprimer b_n en fonction de n.

$$b_n=b_n\times q^n=-120\times 0{,}9^n$$

2) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n=200-120\times 0{,}9^n$.

$$b_n=a_n-200 \quad \text{donc} \quad a_n=b_n+200=-120\times 0{,}9^n+200$$

3) Quelle est la limite de la suite (a_n) ?

$$0{,}9\in\left]-1;1\right[\text{ donc } \lim_{n\to+\infty}0{,}9^n=0 \quad \text{ainsi} \quad \lim_{n\to+\infty}(a_n)=200.$$

Partie C

1) L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable ?

→le nombre d'adhérents doit augmenter vers un maximum de 200, donc 180 adhérents est un objectif réalisable.

2) Même question si l'objectif du président du club est d'atteindre au moins 300 adhérents.

$$a_{n+1}-a_n=\left(200-120\times 0{,}9^{n+1}\right)-\left(200-120\times 0{,}9^n\right)=200-120\times 0{,}9^{n+1}-200+120\times 0{,}9^n$$

$$=120\times 0{,}9^n\times 1-120\times 0{,}9^n\times 0{,}9=120\times 0{,}9^n\times(1-0{,}9)=120\times 0{,}9^n\times 0{,}1=12\times 0{,}9^n$$

Donc la suite (a_n) est croissante avec un maximum égal à 200. Il n'est au regard de ces données pas réalisable d'atteindre 300 adhérents.

Exercice 5B.9

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010+n)$. En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1) Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 3$$

En 2010, année 0, le nombre d'arbres est égal à 50 milliers → $u_0 = 50$

Soit u_n le nombre d'arbres l'année n →5% des arbres sont abattus donc il en reste 95% plus les nouveaux 3 milliers d'arbres ; on obtient bien :

$$u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 3$$

En effet, 0,95 est le coefficient multiplicateur qui correspond à -5 %.

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = 60 - u_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

$$v_{n+1} = 60 - u_{n+1} = 60 - (0,95 \times u_n + 3) = 60 - 0,95 \times u_n - 3 = 57 - 0,95 \times u_n$$
$$= 0,95 \times 60 - 0,95 \times u_n = 0,95 \times (60 - u_n) = 0,95 \times v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10$ et de raison $q = 0,95$.

b) Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

$$v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10$$
$$v_n = v_0 \times q^n = 10 \times 0,95^n$$

c) Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n = 60 - 10 \times 0,95^n$.

$$v_n = 60 - u_n$$
$$v_n + u_n = 60$$
$$u_n = 60 - v_n = 60 - 10 \times 0,95^n$$

3) Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.

En 2015 : $u_5 = 60 - 10 \times 0,95^5 \simeq 52,262$, soit environ 52 262 arbres.

4) **a)** Vérifier que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $u_{n+1} - u_n = 0,5 \times 0,95^n$.

$$u_{n+1} - u_n = \left(60 - 10 \times 0,95^{n+1}\right) - \left(60 - 10 \times 0,95^n\right) = 60 - 10 \times 0,95^{n+1} - 60 + 10 \times 0,95^n$$
$$= 10 \times 0,95^n - 10 \times 0,95^{n+1} = 10 \times 0,95^n \times 1 - 10 \times 0,95^n \times 0,95 = 10 \times 0,95^n \times (1 - 0,95)$$
$$= 10 \times 0,95^n \times 0,05 = 0,5 \times 0,95^n$$

b) En déduire la monotonie de la suite.

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

5) Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.

$$u_n > 50 + 50 \times 5\%$$
$$u_n > 50 + 50 \times 10\%$$

$60-10\times 0,95^{n}>55$

$-10\times 0,95^{n}>55-60$

$0,95^{n}<\dfrac{-5}{-10}$

$0,95^{n}<\dfrac{1}{2}$ →on peut rechercher une solution avec la calculatrice

$\ln\left(0,95^{n}\right)<\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ →si le chapitre sur le logarithme a été traité

$n\times\ln(0,95)<\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ →or $\ln(0,95)<0$

$n>\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\ln(0,95)}$

$n>13,5$ →soit dans 14 ans en 2024.

6) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter.

$0,95\in\left]-1;1\right[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0,95^{n}=0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=60$.

On peut espérer avoir 60 000 arbres dans cette forêt.