Exercice 6E.1

En 1990, Monsieur Dufisc a fait sa première déclaration d'impôt sur le revenu : il a déclaré un revenu annuel de 90 000 francs, l'impôt correspondant s'est élevé à 8 000 francs et son revenu après impôt a donc été de 82000 francs. Chacune des quatre années suivantes, son revenu annuel a augmenté de 2% et l'impôt correspondant a augmenté de 3%.
Monsieur Dufisc souhaite étudier ce qu'il adviendrait de son revenu après paiement de l'impôt si l'évolution constatée se poursuivait.
Dans ce but, on suppose que l'évolution constatée se poursuit et, pour tout entier n positif ou nul, on note :

R_n le montant, exprimé en francs, du revenu annuel de Monsieur Dufisc en l'an $(1990+n)$,

I_n le montant, exprimé en francs, de l'impôt correspondant,

$U_n = R_n - I_n$, le revenu après impôt.

$(R_0 = 90\ 000\ ;\ I_0 = 8000\ ;\ U_0 = 82\ 000)$

1) a) Calculer R_1, I_1, U_1, R_2, I_2, U_2.

   b) Montrer que, pour tout entier positif n, on a : $R_n = 90\ 000 \times 1,02^n$
   $I_n = 8\ 000 \times 1,03^n$

2) a) Montrer que, pour tout entier positif n, $U_{n+1} - U_n = 1\ 800 \times 1,02^n - 240 \times 1,03^n$.

   b) Montrer que : $U_{n+1} < U_n$ équivaut à $n \times \ln\left(\frac{1,03}{1,02}\right) > \ln\left(\frac{15}{2}\right)$.

   c) Déterminer les entiers positifs n qui vérifient $n \times \ln\left(\frac{1,03}{1,02}\right) > \ln\left(\frac{15}{2}\right)$.

3) Si l'évolution que Monsieur Dufisc a constatée concernant son revenu et l'impôt correspondant se poursuit, Monsieur Dufisc verra-t-il son revenu après l'impôt diminuer ?

BONUS CORRIGES Exercice 1 : Amortissement d'un emprunt par annuités

Une ville emprunte 185 000€ qu'elle doit rembourser en 5 paiements annuels égaux, dont le premier aura lieu un an après l'emprunt, le taux de l'intérêt étant 4,50%.
Quelle est la somme à payer chaque année ?

L'intérêt de 1€ au bout de 1 an étant de 0,045€, un capital de 1€ prend une valeur égale à 1,045 €.
Au bout de la première année, la valeur acquise par le capital, que nous nommerons C_1 est égal à au capital emprunté, que nous nommerons C, multiplié par 1,045 auquel il faut retrancher l'annuité, que nous nommerons a, soit :

$$C_1 = 1,045 \times C - a.$$

Au bout de la deuxième année, la valeur acquise par le capital, que nous nommerons C_2 est égal à C_1 multiplié par 1,045 auquel il faut retrancher l'annuité a, soit :

$$C_2 = 1,045 \times C_1 - a.$$

Et donc en remplaçant C_1 par $(1,045 \times C - a)$:

$$C_2 = 1,045 \times (1,045 \times C - a) - a$$

$$C_2 = 1,045^2 \times C - 1,045 \times a - a.$$

Au bout de la troisième année, on peut établir que C_3 est égale à :

$$C_3 = 1,045 \times C_2 - a$$

$$C_3 = 1,045^3 \times C - 1,045^2 \times a - 1,045 \times a - a$$

Au bout de la quatrième année, on peut établir que C_4 est égale à :

$$C_4 = 1{,}045^4 \times C - 1{,}045^3 \times a - 1{,}045^2 \times a - 1{,}045 \times a - a$$

Au bout de la cinquième année, nous aurions :

$$C_5 = 1{,}045^5 \times C - 1{,}045^4 \times a - 1{,}045^3 \times a - 1{,}045^2 \times a - 1{,}045 \times a - a$$

Sauf que le capital restant du au bout de la cinquième année, doit être égale à 0.
Nous obtenons donc :

$$1{,}045^5 \times C - 1{,}045^4 \times a - 1{,}045^3 \times a - 1{,}045^2 \times a - 1{,}045 \times a - a = 0$$

Ou encore, en mettant en facteur l'annuité a :

$$1{,}045^5 \times C - a\left(1{,}045^4 + 1{,}045^3 + 1{,}045^2 + 1{,}045 + 1\right) = 0$$

Le facteur $\left(1{,}045^4 + 1{,}045^3 + 1{,}045^2 + 1{,}045 + 1\right)$ est la somme des termes d'une suite géométrique dont la raison est 1,045 ; cette somme est égale à :

$$1{,}045^4 + 1{,}045^3 + 1{,}045^2 + 1{,}045 + 1 = 1 \times \frac{1 - 1{,}045^5}{1 - 1{,}045} = \frac{1 - 1{,}045^5}{-0{,}045} = \frac{1{,}045^5 - 1}{0{,}045}$$

On a donc l'équation :

$$1{,}045^5 \times C - a \times \frac{1{,}045^5 - 1}{0{,}045} = 0$$

$$1{,}045^5 \times C = a \times \frac{1{,}045^5 - 1}{0{,}045}$$

$$1{,}045^5 \times C \times \frac{0{,}045}{1{,}045^5 - 1} = a$$

$$a = C \times \frac{0{,}045 \times 1{,}045^5}{1{,}045^5 - 1}$$

Or pour notre exemple, $C = 185\ 000\ €$:

$$a = 185\ 000\ € \times \frac{0{,}045 \times 1{,}045^5}{1{,}045^5 - 1}$$

$$a \simeq 42\ 141{,}45\,€$$

Formule de l'annuité

Si on désigne par a l'annuité, par C le capital emprunté, r le taux annuel par € et n le nombre des années, on aura la formule générale de l'annuité :

$$a = C \times r \times \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

BONUS CORRIGES Exercice 2 : Placements égaux successifs à intérêts composés

Un homme dépose au commencement de chaque année une somme de 2050€ pendant 15 ans.
Quel est le capital qui lui sera dû au bout de ce temps, les intérêts étant composés au taux de 4,5% ?

Les valeurs acquises à l'époque du remboursement par les placements annuels sont :

pour la 1^{ere} année : $2045 \times 1{,}045^{15}$

pour la $2^{ème}$ année : $2045 \times 1{,}045^{14}$

pour la $3^{ème}$ année, : $2045 \times 1{,}045^{13}$

...

pour la $14^{ème}$ année : $2045 \times 1{,}045^2$

pour la $15^{ème}$ année : $2045 \times 1{,}045$

La somme due à cet homme au bout de 15 ans est le total de ces valeurs, c'est-à-dire :

$$2045\times1,045^{15}+2045\times1,045^{14}+2045\times1,045^{13}+...+2045\times1,045^{2}+2045\times1,045$$

ou en mettant $2045\times1,045$ en facteur commun,

$$2045\times1,045\times\left(1,045^{14}+1,045^{13}+1,045^{12}+...+1,045+1\right).$$

La quantité entre parenthèses est la somme des termes d'une progression géométrique, dont la raison est 1,045 ; cette quantité est égale à :

$$1\times\frac{1-1,045^{15}}{1-1,045}=\frac{1-1,045^{15}}{-0,045}=\frac{1,045^{15}-1}{0,045}$$

En désignant par S la somme due au déposant, on aura

$$S=2045\times1,045\times\frac{1,045^{15}-1}{0,045}\simeq 42\ 607{,}31\ €$$

BONUS CORRIGES Exercice 3 : **Amortissement par mensualités - cas d'un crédit immobilier**

La principale difficulté de passer à l'étude d'un amortissement par annuité, à un amortissement par mensualité, c'est que cela met en jeu beaucoup plus de terme.
En effet le fait de passer des années au mois multiplie le nombre de terme par 12.
Pour plus de clarté, nous traiterons l'exemple courant d'un emprunt immobilier suivant.

Une personne emprunte la somme 185 000 € qu'elle doit rembourser en 240 paiements mensuels égaux (soit 20 ans), dont le premier des paiements aura lieu un mois juste après l'emprunt, le taux nominal de l'intérêt étant 4,50% par an. Quelle est la somme à payer chaque mois ?

L'intérêt mensuel de 1€ est égale à $\frac{1}{12}$ ème de l'intérêt nominal annuel, c'est-à-dire :

$$\frac{0,045}{12}=0,00375.$$

L'intérêt de 1€ au bout de 1 mois étant de 0,00375€, un capital de 1€ prend une valeur égale à $1,00375$ €.

Au bout du premier mois, la valeur acquise par le capital, que nous nommerons C_1 est égale à au capital emprunté, que nous nommerons C, multiplié par $1,00375$ auquel il faut retrancher la mensualité, que nous nommerons m, soit :

$$C_1=C\times1,00375-m.$$

Au bout du deuxième mois, la valeur acquise par le capital, que nous nommerons C_2 est égale à C_1 multiplié par $1,00375$ auquel il faut retrancher la mensualité m, soit :

$$C_2=1,00375\times C_1-m.$$

Soit en remplaçant C_1 par $C\times1,00375-m$,

$$C_2=1,00375\times\left(C\times1,00375-m\right)-m$$

$$C_2=C\times1,00375^2-1,00375\times m-m$$

Au bout du troisième mois, on peut établir que C_3 est égale à,

$$C_3=C\times1,00375^3-1,00375^2\times m-1,00375\times m-m$$

etc ...

Au bout du 240$^{\text{ème}}$ mois, nous aurions :

$$C_{240}=C\times1,00375^{240}-1,00375^{239}\times m-...-1,00375^{2}\times m-1,00375\times m-m$$

Or le capital restant du au bout des 240 mois doit être égal à 0.

Nous obtenons donc :

$$C\times1,00375^{240}-1,00375^{239}\times m-...-1,00375^{2}\times m-1,00375\times m-m=0$$

Ou encore, en mettant en facture la mensualité m :

$$C\times 1,00375^{240}-m\left(1,00375^{239}+\ldots+1,00375^{2}+1,00375+1\right)=0$$

Le facteur $\left(1,00375^{239}+\ldots+1,00375^{2}+1,00375+1\right)$ est la somme des termes d'une suite géométrique, dont la raison est 1,00375 ; cette somme est égale à :

$$\left(1,00375^{239}+\ldots+1,00375^{2}+1,00375+1\right)=1\times\frac{1-1,00375^{240}}{1-1,00375}=\frac{1-1,00375^{240}}{-0,00375}=\frac{1,00375^{240}-1}{0,00375}$$

On a donc l'équation :

$$C\times 1,00375^{240}-m\times\frac{1,00375^{240}-1}{0,00375}=0$$

De là on tire :

$$C\times 1,00375^{240}=m\times\frac{1,00375^{240}-1}{0,00375}$$

$$C\times 1,00375^{240}\times\frac{0,00375}{1,00375^{240}-1}=m$$

Or $C=185\ 000\,€$ donc :

$$m=185\ 000\times 1,00375^{240}\times\frac{0,00375}{1,00375^{240}-1}\simeq 1170,40\,€$$

Soit un coût total hors assurance de :

$$240\times 1170,40-185\ 000=95\ 860\,€$$

Formule de la mensualité d'un emprunt

Cette formule peut se généraliser de la façon suivante :
soit t le taux d'intérêt mensuel, n le nombre de mois de l'emprunt et C le capital emprunté, on a alors la mensualité m qui est égale à :

$$m=C\times t\times\frac{(1+t)^{n}}{(1+t)^{n}-1}$$

ou encore :

$$m=C\times t\times\frac{1}{\frac{(1+t)^{n}-1}{(1+t)^{n}}}=\frac{C\times t}{1-\frac{1}{(1+t)^{n}}}=\frac{C\times t}{1-(1+t)^{-n}}$$

On préféra bien sur cette dernière forme.

BONUS CORRIGES Exercice 4 : Le taux nominal et taux actuariel dans un crédit

Le taux nominal annuel donné par les banques pour un emprunt immobilier, ne correspond pas au taux équivalent annuel du taux mensuel.
Lorsque votre banquier vous annonce que le taux de l'emprunt qu'il vous propose est égal à 4,5%, cela signifie que le taux mensuel de votre emprunt est égal à $\frac{4,5}{12}$ ***soit 0,375% par mois.***
L'intérêt de 1€ au bout de 1 mois étant de 0,00375€, un capital de 1€ prend une valeur égale à 1,00375 €.
Au bout d'une année, soit 12 mois, les intérêts seront de (voir la partie intérêts composés du site) de :

$$1,00375^{12}-1=0,04593$$

Le taux équivalent à l'année est donc de 4,59%.
Le taux équivalent à l'année est le taux actuariel, qui sert de base au calcul du taux effectif auquel il faudra encore ajouter les frais de dossier et les frais d'assurance.
Dans cet exemple, l'écart entre le taux nominal 4,5% et le taux actuariel 4,59% n'est pas si grand.

Mais cela est tout autrement si on vous propose un taux nominal de 18% soit 1,5% de taux mensuel.
Généralement on vous annonce que le taux mensuel 1,5% et on laisse le soin au consommateur de faire le calcul pour obtenir le taux nominal de 18% par an.
Mais ce n'est pas encore le taux actuariel, qui lui est obtenu en élevant 1,015 à la puissance 12 en retranchant 1, ce qui donne :

$$1{,}015^{12}-1=1{,}19561-1=0{,}19561$$

soit un taux réel de 19,56% à l'année.

Exemple d'un crédit à la consommation type révolving.

On obtient avec peu d'efforts des cartes de crédit ouvrant un droit à découvert de 1500€. Pour fixer les idées prenons le taux mensuel de 1,5% précédemment étudiée.
Dans ce genre de crédit, on ne calcule pas une mensualité pour un nombre de mois donnés mais on rembourse simplement une certaine somme par mois qui dépend du découvert atteint.
Supposons que le découvert maximal soit 1500€ dans notre exemple. Le consommateur va simplement reconstituer sa réserve de crédit, par exemple, par des remboursements de 45€ par mois.
Si le consommateur souhaite solder complément sa dette, combien de mois va-t-il devoir verser les mensualités de 45€ ?

A partir de la formule sur les mensualités, on peut déterminer le nombre de mois. Soit n la seule inconnue dans notre exemple :

$$m=\frac{C\times t}{1-(1+t)^{-n}}$$

$$m\times\left[1-(1+t)^{-n}\right]=C\times t$$

$$1-(1+t)^{-n}=\frac{C\times t}{m}$$

$$-(1+t)^{-n}=\frac{C\times t}{m}-1$$

$$(1+t)^{-n}=1-\frac{C\times t}{m}$$

$$(1+t)^{-n}=\frac{m}{m}-\frac{C\times t}{m}=\frac{m-C\times t}{m}$$

$$(1+t)^{n}=\frac{m}{m-C\times t}$$

De là on obtient, en passant par les logarithmes :

$$\ln\left[(1+t)^{n}\right]=\ln\left(\frac{m}{m-C\times t}\right)$$

$$n\times\ln(1+t)=\ln\left(\frac{m}{m-C\times t}\right)$$

$$n=\frac{\ln\left(\frac{m}{m-C\times t}\right)}{\ln(1+t)}$$

$n\simeq 46{,}55$ mois et un coût total de 594,75€.

Le consommateur va donc mettre plus de 46 mois soit pratiquement 4 ans à rembourser son emprunt de 1500€.
Rappelons qu'un emprunt à la consommation classique de 1500€ sur 24 mois à un taux de 8% donne des mensualités de 67,84€ soit un coût total de 128,16€.

Exercice 6E.1

En 1990, Monsieur Dufisc a fait sa première déclaration d'impôt sur le revenu : il a déclaré un revenu annuel de 90 000 francs, l'impôt correspondant s'est élevé à 8 000 francs et son revenu après impôt a donc été de 82 000 francs. Chacune des quatre années suivantes, son revenu annuel a augmenté de 2% et l'impôt correspondant a augmenté de 3%.

Monsieur Dufisc souhaite étudier ce qu'il adviendrait de son revenu après paiement de l'impôt si l'évolution constatée se poursuivait.

Dans ce but, on suppose que l'évolution constatée se poursuit et, pour tout entier n positif ou nul, on note :

R_n *le montant, exprimé en francs, du revenu annuel de Monsieur Dufisc en l'an* $(1990+n)$,

I_n *le montant, exprimé en francs, de l'impôt correspondant,*

$U_n = R_n - I_n$, *le revenu après impôt.*

$\left(R_0 = 90\ 000\ ;\ I_0 = 8000\ ;\ U_0 = 82\ 000\right)$

1) a) *Calculer* R_1, I_1, U_1, R_2, I_2, U_2.

$$R_1 = R_0 + R_0 \times 2\% = R_0 \times 1,02 = 90\ 000 \times 1,02 = 91\ 800$$
$$I_1 = I_0 + I_0 \times 3\% = I_0 \times 1,03 = 8\ 000 \times 1,03 = 8\ 240$$
$$U_1 = R_1 - I_1 = 91\ 800 - 8\ 240 = 83\ 560$$
$$R_2 = R_1 \times 1,02 = 91\ 800 \times 1,02 = 93636$$
$$I_2 = I_1 \times 1,03 = 8\ 240 \times 1,03 = 8\ 487,2$$
$$U_2 = R_2 - I_2 = 93\ 636 - 8\ 487,2 = 85\ 148,8$$

b) *Montrer que, pour tout entier positif n, on a :* $R_n = 90\ 000 \times 1,02^n$ *et* $I_n = 8\ 000 \times 1,03^n$

$$R_{n+1} = R_n \times 1,02$$

Donc (R_n) est une suite géométrique de premier terme $R_0 = 90\ 000$ et de raison $q = 1,02$.

$$R_n = 90\ 000 \times 1,02^n$$
$$I_{n+1} = I_n \times 1,03$$

Donc (I_n) est une suite géométrique de premier terme $I_0 = 8\ 000$ et de raison $q = 1,03$.

$$I_n = 8\ 000 \times 1,03^n$$

2) a) *Montrer que, pour tout entier positif n,* $U_{n+1} - U_n = 1\ 800 \times 1,02^n - 240 \times 1,03^n$.

$$\begin{aligned}
U_{n+1} - U_n &= \left(R_{n+1} - I_{n+1}\right) - \left(R_n - I_n\right) = R_{n+1} - I_{n+1} - R_n + I_n \\
&= 90\ 000 \times 1,02^{n+1} - 8\ 000 \times 1,03^{n+1} - 90\ 000 \times 1,02^n + 8\ 000 \times 1,03^n \\
&= 90\ 000 \times 1,02^n \times 1,02 - 90\ 000 \times 1,02^n \times 1 - 8\ 000 \times 1,03^n \times 1,03 + 8\ 000 \times 1,03^n \times 1 \\
&= 90\ 000 \times 1,02^n \times (1,02 - 1) + 8\ 000 \times 1,03^n \times (1 - 1,03) \\
&= 90\ 000 \times 1,02^n \times 0,02 + 8\ 000 \times 1,03^n \times (-0,03) \\
&= 1\ 800 \times 1,02^n - 240 \times 1,03^n
\end{aligned}$$

b) *Montrer que :* $U_{n+1} < U_n$ *équivaut à* $n \times \ln\left(\dfrac{1,03}{1,02}\right) > \ln\left(\dfrac{15}{2}\right)$.

$$U_{n+1} < U_n \iff U_{n+1} - U_n < 0$$
$$1\ 800 \times 1,02^n - 240 \times 1,03^n < 0$$
$$1\ 800 \times 1,02^n < 240 \times 1,03^n$$

$$\frac{1\,800}{240}\times 1,02^n < 1,03^n$$

$$\frac{15}{2}\times 1,02^n < 1,03^n$$ →en passant par le logarithme, fonction croissante

$$\ln\left(\frac{15}{2}\times 1,02^n\right) < \ln\left(1,03^n\right)$$

$$\ln\left(\frac{15}{2}\right) + \ln\left(1,02^n\right) < \ln\left(1,03^n\right)$$

$$\ln\left(\frac{15}{2}\right) < \ln\left(1,03^n\right) - \ln\left(1,02^n\right)$$

$$\ln\left(\frac{15}{2}\right) < \ln\left(\frac{1,03^n}{1,02^n}\right)$$

$$\ln\left(\frac{15}{2}\right) < \ln\left[\left(\frac{1,03}{1,02}\right)^n\right]$$

$$\ln\left(\frac{15}{2}\right) < n\times\ln\left(\frac{1,03}{1,02}\right)$$

c) *Déterminer les entiers positifs n qui vérifient* $n\times\ln\left(\frac{1,03}{1,02}\right) > \ln\left(\frac{15}{2}\right)$.

$$\frac{1,03}{1,02} > 1 \quad \text{donc} \quad \ln\left(\frac{1,03}{1,02}\right) > 0$$

$$n\times\ln\left(\frac{1,03}{1,02}\right) > \ln\left(\frac{15}{2}\right) \quad \rightarrow \; n > \frac{\ln\left(\frac{15}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1,03}{1,02}\right)} \quad \rightarrow n > 206,5$$

3) *Si l'évolution que Monsieur Dufisc a constatée concernant son revenu et l'impôt correspondant se poursuit, Monsieur Dufisc verra-t-il son revenu après l'impôt diminuer ?*

→Le revenu après impôt ne doit baisser qu'au bout de 206 années