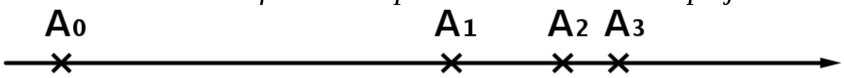
Exercice 7C.1 **Le paradoxe d'Achille et de la tortue** fut imaginé par Zénon d'Élée (5 siècles avant J.-C.)
Achille qui court très vite, dispute une course avec une tortue à laquelle il a laissé une certaine distance d'avance.
Au départ Achille se trouve à la position A_0 et la tortue à la position A_1.
Achille court et arrive en A_1. Pendant qu'il courait, la tortue a avancé et elle se trouve alors à la position A_2.
Achille court et arrive en A_2. Pendant qu'il courait, la tortue a avancé et elle se trouve alors à la position A_3.
Etc ...
La course peut se poursuivre selon une infinité d'étapes et Achille ne rattrape jamais la tortue.
Pourtant si Achille court plus vite que la tortue, on sait bien qu'il va la rattraper !
C'est ce type de proposition qui semble contraire à la logique, au "bon sens", que l'on appelle paradoxe.
Supposons qu'Achille parcourt 4 mètres en une seconde (soit environ 15 km/h), que la tortue avance de 0,5 m en une seconde et qu'elle ait, au départ, une avance de 560 mètres.

1) Quelle est la distance $d_0 = A_0A_1$ et quel est le temps t_0 qu'il faut à Achille pour parcourir cette distance ?
2) Pendant qu'Achille parcourait la distance d_0, de quelle longueur a avancé la tortue ?
3) Quel est le temps t_1 qu'il faut à Achille pour parcourir la distance $d_1 = A_1A_2$?
4) On note d_n la distance A_nA_{n+1} et t_n le temps qu'il faut à Achille pour parcourir la distance d_n.
   Justifier que pour tout entier n, $d_n = 8 \times d_{n+1}$ et que $t_n = 8 \times t_{n+1}$.
5) En déduire que les suites (d_n) et (t_n) sont géométriques et donner leur raison.
6) Donner l'expression de d_n en fonction de n et de t_n en fonction de n.
7) Calculer $D_n = d_0 + d_1 + d_2 + ... + d_n$ et $T_n = t_0 + t_1 + t_2 + ... + t_n$.
8) Donner $\lim_{n \to +\infty} D_n$ et $\lim_{n \to +\infty} T_n$.
9) Comment peut-on expliquer le paradoxe ?

Exercice 7C.1 **Le paradoxe d'Achille et de la tortue** fut imaginé par Zénon d'Élée (5 siècles avant J.-C.)
Achille qui court très vite, dispute une course avec une tortue à laquelle il a laissé une certaine distance d'avance.
Au départ Achille se trouve à la position A_0 et la tortue à la position A_1.
Achille court et arrive en A_1. Pendant qu'il courait, la tortue a avancé et elle se trouve alors à la position A_2
Achille court et arrive en A_2. Pendant qu'il courait, la tortue a avancé et elle se trouve alors à la position A_3
Etc ...
La course peut se poursuivre selon une infinité d'étapes et Achille ne rattrape jamais la tortue.



Pourtant si Achille court plus vite que la tortue, on sait bien qu'il va la rattraper !
C'est ce type de proposition qui semble contraire à la logique, au "bon sens", que l'on appelle paradoxe.
Supposons qu'Achille parcourt 4 mètres en une seconde (soit environ 15 km/h), que la tortue avance de 0,5 m en une seconde et qu'elle ait, au départ, une avance de 560 mètres.

1) *Quelle est la distance $d_0 = A_0A_1$ et quel est le temps t_0 qu'il faut à Achille pour parcourir cette distance ?*

Au départ, Achille est en A_0, la tortue en A_1 avec une avance de 560 mètres.

Donc $d_0 = A_0A_1 = 560$ mètres.

$$\text{Vitesse} = \frac{\text{Distance}}{\text{Temps}} \text{ donc } t_0 = \frac{d_0}{V_{Ach}} = \frac{560}{4} = 130 \text{ secondes.}$$

2) *Pendant qu'Achille parcourait la distance d_0, de quelle longueur a avancé la tortue ?*

Pendant ces 130 secondes, la tortue a avancé de : $d_1 = V_T \times t_0 = 0,5 \times 130 = 65\ m$

3) *Quel est le temps t_1 qu'il faut à Achille pour parcourir la distance $d_1 = A_1A_2$?*

$$t_1 = \frac{d_1}{V_{Ach}} = \frac{65}{4} = 16,25 \text{ secondes.}$$

4) *On note d_n la distance A_nA_{n+1} et t_n le temps qu'il faut à Achille pour parcourir la distance d_n.*
Justifier que pour tout entier n, $d_n = 8 \times d_{n+1}$ et que $t_n = 8 \times t_{n+1}$.

$$d_n = V_{Ach} \times t_n \quad \text{et} \quad d_{n+1} = V_T \times t_n \quad \text{donc} \quad t_n = \frac{d_{n+1}}{V_T}$$

Ainsi : $$d_n = V_{Ach} \times \frac{d_{n+1}}{V_T} = \frac{V_{Ach}}{V_T} \times d_{n+1} = \frac{4}{0,5} \times d_{n+1} = 8 \times d_{n+1}$$

$$t_n = \frac{d_{n+1}}{V_T} = \frac{V_{Ach} \times t_{n+1}}{V_T} = \frac{4 \times t_{n+1}}{0,5} = 8 \times t_{n+1}$$

5) *En déduire que les suites (d_n) et (t_n) sont géométriques et donner leur raison.*

$$d_{n+1} = \frac{1}{8} d_n \quad \text{et} \quad t_{n+1} = \frac{1}{8} t_n$$

Ces deux suites sont géométriques de raison $\frac{1}{8}$.

6) *Donner l'expression de d_n en fonction de n et de t_n en fonction de n.*

$$d_n = d_0 \times q^n = 560 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n \qquad t_n = t_0 \times q^n = 130 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

7) *Calculer* $D_n = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ *et* $T_n = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$.

$$D_n = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 560 \times \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{8}} = 560 \times \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{\frac{8}{8}-\frac{1}{8}} = 560 \times \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{\frac{7}{8}}$$

$$D_n = 560 \times \frac{8}{7} \times \left[1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right] = 640 \times \left[1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right]$$

$$T_n = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 130 \times \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{8}} = 130 \times \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{\frac{8}{8}-\frac{1}{8}} = 130 \times \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{\frac{7}{8}}$$

$$T_n = 130 \times \frac{8}{7} \times \left[1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right] = \frac{1040}{7} \times \left[1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right]$$

8) *Donner* $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

$$\frac{1}{8} \in]-1;1[\text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} D_n = 640 \text{ mètres} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} T_n = \frac{1040}{7} \simeq 148,57 \text{ secondes.}$$

9) *Comment peut-on expliquer le paradoxe ?*

Achille dans la présentation de Zénon d'Elée ne peut rattraper la tortue en raison du découpage à l'infini du temps nécessaire pour arriver à hauteur exacte de la tortue.

L'approche avec les suites (ci-dessus) montre que la limite temporelle existe, que l'on peut mathématiquement identifier un instant précis où Achille se trouve à hauteur exacte de la tortue.

Ce qui signifie que juste après, Achille dépasse la tortue et le paradoxe est levé.