Proposition de démonstration de la propriété d'Euler :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}=\sqrt{n\pi}$$

Première étape :

$$\begin{aligned}2\times4\times6\times\ldots\times(2n)&=(2\times1)\times(2\times2)\times(2\times3)\times\ldots\times(2\times n)\\&=2^n\times1\times2\times3\times\ldots\times n\\&=2^n\times n!\end{aligned}$$

Deuxième étape :

$$\begin{aligned}1\times3\times5\times\ldots\times(2n+1)&=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times\ldots\times(2n+1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times\ldots\times(2n+1)}{(2\times1)\times(2\times2)\times(2\times3)\times\ldots\times(2\times n)}\\&=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)=\frac{(2(n-1)+1)!}{2^{n-1}\times(n-1)!}=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}\times(n-1)!}$$

Troisième étape :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\times n!}{\dfrac{(2n-1)!}{2^{n-1}\times(n-1)!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\times n!\times2^{n-1}\times(n-1)!}{(2n-1)!}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n-1}\times n!\times(n-1)!}{(2n-1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n-1}\times n!\times(n-1)!}{(2n-1)!}\times\frac{2n}{2n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n-1}\times2\times n!\times(n-1)!\times n}{(2n-1)!\times2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}\times(n!)^2}{(2n)!}\end{aligned}$$

Or d'après la **formule de Stirling** : https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Stirling

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\times n^n\times e^{-n}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}\times(n!)^2}{(2n)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}\times\left(\sqrt{2\pi n}\times n^n\times e^{-n}\right)^2}{\sqrt{2\pi\times2n}\times(2n)^{2n}\times e^{-2n}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}\times\boxed{2}\pi n\times n^{2n}\times\boxed{e^{-2n}}}{\boxed{2}\sqrt{\pi n}\times(2n)^{2n}\times\boxed{e^{-2n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}\times\sqrt{\pi n}\times n^{2n}}{2^{2n}\times n^{2n}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\pi n}\end{aligned}$$