La plus belle formule de mathématique

par *Ramanujan*

$$1+\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{1\times 3\times 5}+\frac{1}{1\times 3\times 5\times 7}+\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ddots}}}}}=\sqrt{\frac{\pi\times e}{2}}$$

540. (S. Krishnaswami Aiyangar):—If S, H be the foci of the maximum inscribed ellipse of ABC and SH subtends angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ at the vertices, prove that

$$bc\cot\theta_1+ca\cot\theta_2+ab\cot\theta_3=\Sigma(a^2)-\{\Sigma(a^4)-\Sigma(a^2b^2)\}^{\frac{1}{2}}.$$

541. (S. Ramanujan):—Prove that

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{2}{1+}\,\frac{3}{1+}\,\frac{4}{1+}\ldots=\sqrt{\left(\frac{\pi e}{2}\right)}$$

542. (K. V. Anantanarayana Sastri, B.A.):—Expand $\theta\cot\frac{1}{4}\theta$ in powers of $\cos\theta$.

Programme python :

```
from math import *
n = int(input("Saisir un rang n:"))
u = 0
v = 1 + n/(n+1)

def produit(n):
   p = 1
   for i in range(1,n+1):
      p *= 2*i - 1
   return p

for i in range (1,n+1):
   p = produit(i)
   u += 1/p
for j in range(1,n):
   v = 1 + (n-j)/v
v = 1/v
print(u+v)
print((pi*exp(1)/2)**0.5)
```

Pour n = 1000, on obtient :

2.0663656770612464
2.0663656770612464

Une merveilleuse et « simple » identité Ramanujan

https://www.gaussianos.com/una-maravillosa-y-sencilla-identidad-de-ramanujan/

Les formules, identités et expressions surprenantes dues à Ramanujan sont célèbres dans le monde mathématique « ». Il existe différents types, mais la vérité est que beaucoup d'entre eux sont liés au nombre Pi. Aujourd'hui, je vous en apporte un que j'ai récemment rencontré et que j'ai particulièrement aimé.
L'identité en question a été proposée comme un exercice par Ramanujan lui-même dans « Le Journal de la Indian Mathematical Society » en 1914 et relie une série infinie, une fraction continue et les deux nombres irrationnels et transcendants les plus importants et les plus connus. Voilà:

$$1+\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{1\times 3\times 5}+\frac{1}{1\times 3\times 5\times 7}+\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ddots}}}}}=\sqrt{\frac{\pi\times e}{2}}$$

Commençons par analyser la première partie, la somme infinie.

Si nous savions quelle fonction $f(x)$ a la série de Taylor suivante :

$$f(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\times 3}+\frac{x^5}{1\times 3\times 5}+\frac{x^7}{1\times 3\times 5\times 7}+\ldots$$

alors $f(1)$ serait la même chose que notre série infinie.

En prenant l'expression précédente et en dérivant, nous sommes facilement arrivés à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} f'(x)&=1+\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1\times 3}+\frac{x^6}{1\times 3\times 5}+\ldots \\ &=1+x\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\times 3}+\frac{x^5}{1\times 3\times 5}+\ldots\right)\end{aligned}$$

D'où : $f'(x)=x\times f(x)+1$

1. On résout l'équation homogène : $f'(x)=x\times f(x)$.

$$f'(x)=x\times f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=x \Leftrightarrow \ln\left(\left|f(x)\right|\right)=\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow f(x)=k\times e^{\frac{1}{2}x^2} \quad , \ k\in\mathbb{R}$$

2. On trouve une solution particulière de $f'(x)=x\times f(x)+1$, de la forme $g(x)=\mathrm{A}(x)\times e^{\frac{1}{2}x^2}$

Ainsi : $g'(x)=\mathrm{A}'(x)\times e^{\frac{1}{2}x^2}+\mathrm{A}(x)\times xe^{\frac{1}{2}x^2}$.

On obtient : $\mathrm{A}'(x)\times e^{\frac{1}{2}x^2}+\mathrm{A}(x)\times xe^{\frac{1}{2}x^2}=x\times\mathrm{A}(x)\times e^{\frac{1}{2}x^2}+1$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A}'(x)\times e^{\frac{1}{2}x^2}=1 \Leftrightarrow \mathrm{A}'(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2} \Leftrightarrow \mathrm{A}(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Donc : $g(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\times e^{\frac{1}{2}x^2}$

3. On en déduit toutes les solutions de $f'(x)=x\times f(x)+1$:

$$f(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\times e^{\frac{1}{2}x^2}+k\times e^{\frac{1}{2}x^2} \quad , \ k\in\mathbb{R}.$$

Or $f(0)=0$ donc $k=0$

Les solutions de $f'(x) = x \times f(x) + 1$ sont de la forme :

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

On prend maintenant $x = 1$, nous arrivons à :

$$1 + \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{1\times 3\times 5} + \frac{1}{1\times 3\times 5\times 7} + \ldots = \sqrt{e} \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

La deuxième partie est un peu plus compliquée, et nous n'entrerons pas dans les détails (vous pouvez les voir dans le premier lien de la liste à la fin de cet article). Oui, il est intéressant de commenter que la célèbre Fonction gaussienne entre en jeu. Plus précisément, la zone au milieu de la cloche de Gauss:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Nous essayons de trouver à quelle équation différentielle correspond à la fonction :

$$g(x) = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{2}{x + \cfrac{3}{x + \cfrac{4}{x + \ddots}}}}}$$

et il s'avère qu'il s'agit de l'équation $g'(x) = x \times g(x) - 1$.

La résoudre, unir le résultat avec ce qui a été obtenu pour la série infinie initiale et évaluer en $x = 1$, nous sommes arrivés au résultat souhaité :

Je répète que vous avez les détails dans le premier lien de la liste que vous trouverez un peu ci-dessous.
Pour finir, souligner que cette identité pourrait être considérée comme « simple » car les connaissances et les outils nécessaires pour la démontrer sont disponibles pour plus de personnes que nécessaire pour les autres découvertes, en fait, John Baez le répertorie comme « le plus simple » (et G. H. Hardy comme « le moins impressionnant »). Malgré l'opinion du grand Hardy, cela me semble toujours impressionnant et, pourquoi ne pas le dire, d'une grande beauté, qu'il n'a rien à envier à cet égard à aucune des autres merveilles que Ramanujan nous a enseignées.

https://johncarlosbaez.wordpress.com/2020/11/18/ramanujans-easiest-formula/